

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-RALEIGH, USA.

K. GIRKMANN-WIEN · F. JUNG-WIEN · F. MAGYAR-WIEN

E. MELAN-WIEN · H. MELAN-WIEN

SCHRIFTLEITUNG

F. MAGYAR-WIEN

BAND VII, HEFT 3

MIT 42 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 29. SEPTEMBER 1953)



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1953

Das

Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 bis 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)

Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden, alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Tel. U 26 5 60, Telegrammadresse: Springerbuch Wien

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in diesen drei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzeilen mitzuliefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beiliegenden Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Der Verlag.

Band VII, Heft 3

Inhaltsverzeichnis

Seite

Originalarbeiten:

| | |
|--|-----|
| H. Fieber, Über die Temperaturverteilung in einem von stationärem Strom durchflossenen Draht. (Mit 3 Textabbildungen.) | 161 |
| H. Jung, Der rotationssymmetrische elastisch-plastische Körper. (Mit 1 Textabbildung.) | 168 |
| W. Zerna, Berechnung von Translationsschalen. (Mit 3 Textabbildungen.) | 181 |
| H. Egger, Querschwingungen von Trägern mit Feder und Zusatzmasse. (Mit 11 Textabbildungen.) | 188 |
| F. Jaburek, Die Festigkeit von radial beschauelten Laufrädern. (Mit 14 Textabbildungen.) | 214 |
| P. Lesky, Über eine besondere Klasse von zweiten Randwertaufgaben. (Mit 1 Textabbildung.) | 231 |
| H. Weirich, Beitrag zur Stabilität des Schwingungsvorganges im Differentialwasserschloß | 236 |
| R. Bereis, Über die symmetrische Rollung. (Mit 3 Textabbildungen.) | 243 |
| J. Krettner, Anwendung der Tensorrechnung auf die Theorie der Rotationsschalen | 246 |
| W. Gröbner und P. Lesky, Eigenschwingungen eines Kreisringes mit rechteckigem Querschnitt. (Mit 1 Textabbildung.) | 254 |
| A. Strasser, Zur Beulung versteifter Platten. (Mit 5 Textabbildungen) | 262 |

Buchbesprechungen

Detra, R. W., The Secondary Flow in Curved Pipes (R. Bruniak). — Duschek, A., Vorlesungen über höhere Mathematik, 3. Band (E. Czitary). — Mayrhofer, K., Inhalt und Maß (H. Sagan). — Richter, H., Aufgaben aus der technischen Thermodynamik (C. Kämmerer). — Sequenz, H., Die Wicklungen elektrischer Maschinen, 2. Band (R. Stix).

Über die Temperaturverteilung in einem von stationärem Strom durchflossenen Draht.

Von H. Fieber, Wien.

Mit 3 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Es wird das Temperaturfeld in einem zylindrischen Leiter berechnet, welcher durch Gleichstrom erwärmt wird, unter Annahme konstanter Wärmeleitfähigkeit und mit der Temperatur linear veränderlicher elektrischer Leitfähigkeit.

Summary. The temperature field in a cylindrical conductor, heated by direct current, is calculated under the assumption that the heat conductivity is constant and that the electrical conductivity is a linear function of the temperature.

Résumé. Le champ de température d'un conducteur cylindrique, chauffé par du current continu, est calculé à la base de la supposition que la conductivité thermique soit constante et que la conductivité électrique soit une fonction linéaire de la température.

1. Ein Draht von der Länge L mit kreisförmigem Querschnitt und dem Durchmesser $2R$ sei zwischen zwei Blöcke eingespannt, welche die Stromanschlüsse darstellen.

Es sei vorausgesetzt:

a) Übergangswiderstände zwischen Draht und Block seien vernachlässigbar klein.

b) Wärmeverluste durch Strahlung werden nicht berücksichtigt.

c) Die Wärmeleitfähigkeit κ ist konstant, die elektrische Leitfähigkeit σ mit der Temperatur linear veränderlich.

d) Betreffs des Wärmeüber- bzw. Wärmedurchganges gelte das Newtonsche bzw. das Fouriersche Gesetz.

2. Die zeitliche Änderung des Wärmeinhaltes W des Einheitsvolumens wird gleich sein der in diesem entwickelten Wärmemenge Q_{el} vermöge des elektrischen Stromes, vermindert um den auf Grund der Wärmeleitung aus dem Einheitsvolumen ausströmenden Anteil Q . Also:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = Q_{el} - Q. \quad (1)$$

Dabei gilt: $dW = \rho c dT$, wobei ρ die Dichte und c die spezifische Wärme des Drahtes bedeutet. Die durch den elektrischen Strom im Volumen V entwickelte Wärmemenge ist gleich $\int_V (\mathfrak{J}, \mathfrak{E}) d\tau$, wo die elektrische Stromdichte \mathfrak{J} mit der elektrischen Feldstärke \mathfrak{E} mittels der Gleichung $\mathfrak{J} = \sigma \mathfrak{E}$ zusammenhängt¹. Berücksichtigt man dies, so erhält man für die im Volumelement $d\tau$ erzeugte Wärmemenge $\frac{1}{\sigma} \mathfrak{J}^2 d\tau$. Um

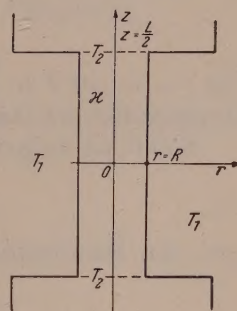


Abb. 1. Zur Erläuterung der Anordnung.

¹ Die Stromdichte \mathfrak{J} wird aus mathematischen Gründen als konstant angenommen.

dies auf cal umzurechnen, ist noch mit dem elektrischen Wärmeäquivalent j zu multiplizieren. Endlich ist die durch die Hülle eines umschlossenen Volumens ausströmende Wärmemenge gegeben durch $\oint (w, df)$, wenn $w = -\kappa \nabla T$ die Wärmestromdichte darstellt. Mit Hilfe des Gaußschen Satzes kann dies umgeformt werden und man erhält für die aus $d\tau$ ausströmende Wärmemenge $(\nabla, w) d\tau$. Dies zusammen liefert auf Grund von Gl. (1):

$$\varrho c \frac{\partial T}{\partial t} = j \frac{\nabla^2}{\sigma} + (\nabla, \kappa \nabla T).$$

Entsprechend der Voraussetzung c) soll $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_0} (1 + \alpha T)$ und $\kappa = \text{konst.}$ sein. Mit den Abkürzungen:

$$a = \frac{\kappa}{\varrho c}, \quad b = \alpha C, \quad C = j \frac{\nabla^2}{\varrho c \sigma_0} \quad (2)$$

erhält man nun die bekannte Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T + b T + C. \quad (3)$$

Durch Einführung von Zylinderkoordinaten wird $T = T(r, \varphi, z; t)$ und mit der Annahme exakter Zylindersymmetrie $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$. Auf Grund der Voraussetzung d) ist für $r = R$:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial r} = -\kappa_1 (T - T_1) \quad \text{oder mit } k_1 = \frac{\kappa_1}{\kappa}, \quad K_1 = k_1 T_1 \quad \text{folgt: } \frac{\partial T}{\partial r} + k_1 T = K_1.$$

Dabei sei T_1 die Temperatur des umgebenden Mediums, κ_1 die Wärmeübergangszahl.

In axialer Richtung sei der Einfachheit halber vorgegeben: $T = T_2$ für $z = \pm L/2$ und alle r und t . Die ganze Anordnung ist also symmetrisch in z , weshalb die Randbedingungen geschrieben werden können:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

für $z = 0$ und $T(r, L/2; t) = T_2$. T_2 wird als die auf der Fläche $z = \pm L/2$ konstante Temperatur der Anschlußblöcke betrachtet.

Somit ist folgendes inhomogene Problem zu lösen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\} + b T + C \quad (4)$$

mit den Randbedingungen:

$$\text{I. } \left(k_1 T + \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{T(R, z; t)} = K_1, \quad \text{II. } \begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{T(r, 0; t)} = 0 \\ T\left(r, \frac{L}{2}; t\right) = T_2 \end{cases}$$

und als Anfangsbedingung werde festgesetzt: $T(r, z; 0) = T_0$.

Die hier verwendeten linearen Randbedingungen berücksichtigen entsprechend b) nicht die Wärmestrahlung, welche dem T^4 -Gesetz gehorcht und schränken somit bereits die Gültigkeit der gesuchten Lösung ein. Um diese nun zu finden, wendet man zweckmäßigerweise Integraltransformationen an.

3. Mittels der Substitution:

$$\vartheta = T - T_1 \quad (5)$$

wird die Randbedingung II homogen gemacht. Damit geht (4) über in

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right\} + b \vartheta + d, \quad \text{wo } d = C + b T_1 \quad (4')$$

und die Randbedingungen in:

$$\text{I}' \cdot \left(k_1 \vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)_{\vartheta(R, z; t)} = 0, \quad \text{II}' \cdot \begin{cases} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)_{\vartheta(r, 0; t)} = 0 \\ \vartheta\left(r, \frac{L}{2}; t\right) = T_2 - T_1 \end{cases}$$

mit der Anfangsbedingung: $\vartheta(r, z; 0) = T_0 - T_1$.

Durch eine Hankel-Transformation wird nun die Variable r eliminiert. Multipliziert man (4') mit $r J_0(\omega_v r)$ (ω_v reell), und integriert anschließend von 0 bis R , so ergeben sich folgende Integrale:

$$\int_0^R r J_0(\omega_v r) dr = \frac{R^2}{\Omega_v} J_1(\Omega_v),$$

wobei: $\omega_v R = \Omega_v$; dabei wurde die Substitution $r = \varrho \cdot R$ ausgeführt und über die Bedeutung von ω_v bzw. Ω_v noch nichts ausgesagt. Weiters tritt auf:

$$\int_0^R \vartheta r J_0(\omega_v r) dr = R^2 \tilde{\vartheta}, \quad (6)$$

sowie

$$\int_0^R \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) r J_0(\omega_v r) dr = \varrho \left[J_0(\Omega_v \varrho) \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho} - \Omega_v J_0'(\Omega_v \varrho) \vartheta \right]_0^1 - \Omega_v^2 \tilde{\vartheta} \quad (r = \varrho R)$$

Die Richtigkeit der letzten Beziehung bestätigt man leicht durch zweimalige partielle Integration. Man sieht sofort, für $\varrho = 0$ verschwindet der erste Term; ferner gilt an der oberen Grenze die durch I' vermittelte Relation. Damit wird dieses Glied:

$$- \vartheta [k_1 R J_0(\Omega_v) + \Omega_v J_0'(\Omega_v)].$$

Da das Ω_v noch willkürlich ist, kann es als positive Wurzel der Gleichung:

$$h_1 J_0(\Omega) + \Omega J_0'(\Omega) = 0 \quad \text{mit} \quad h_1 = k_1 R \quad (7)$$

gewählt werden, womit der erste Term obiger Gleichung auch an der oberen Grenze verschwindet. Somit ändert sich (4') ab zu:

$$\frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \tilde{\vartheta}}{\partial z^2} + \left(b - \frac{a}{R^2} \Omega_v^2 \right) \tilde{\vartheta} + \frac{d}{\Omega_v} J_1(\Omega_v) \quad (4'')$$

mit den Randbedingungen:

$$\tilde{\vartheta}(z; 0) = \frac{1}{\Omega_v} (T_0 - T_1) J_1(\Omega_v) \quad \text{und} \quad \text{II}'' \cdot \begin{cases} \left(\frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial z} \right)_{\tilde{\vartheta}(0; t)} = 0 \\ \tilde{\vartheta}\left(\frac{L}{2}; t\right) = \frac{1}{\Omega_v} (T_2 - T_1) J_1(\Omega_v). \end{cases}$$

Die Substitution:

$$\Theta = \tilde{\vartheta} - \frac{1}{\Omega_v} (T_2 - T_1) J_1(\Omega_v) \quad (8)$$

homogenisiert noch II'' und formt (4'') um:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + \left(b - \frac{a}{R^2} \Omega_v^2 \right) \Theta + \frac{1}{\Omega_v} \left[d + \left(b - \frac{a}{R^2} \Omega_v^2 \right) (T_2 - T_1) \right] J_1(\Omega_v) \quad (4''')$$

und entsprechend die Randbedingungen:

$$\Theta(z; 0) = \frac{1}{\Omega_v} (T_0 - T_2) J_1(\Omega_v) \quad \text{sowie} \quad \text{II}''' \cdot \begin{cases} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)_{\Theta(0; t)} = 0 \\ \Theta\left(\frac{L}{2}; t\right) = 0. \end{cases}$$

Führt man jetzt eine endliche cos-Transformation durch, d. h. multipliziert (4''') mit $\cos \lambda_\mu z$ und integriert von 0 bis $L/2$, so treten folgende Integrale auf:

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \Theta \cos \lambda_\mu z \cdot dz = \frac{L}{2} \tilde{\Theta}, \quad (9)$$

ferner:

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \cos \lambda_\mu z \cdot dz = \frac{L}{2} \frac{1}{A_\mu} \sin A_\mu,$$

wobei $z = \zeta L/2$ und $A_\mu = \lambda_\mu \cdot L/2$ gesetzt wurde. Weiters ergibt sich mit den gleichen Substitutionen:

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \cos \lambda_\mu z \cdot dz = \frac{2}{L} \left[\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} \cos A_\mu \zeta + A_\mu \Theta \sin A_\mu \zeta \right]_0^1 - \frac{2}{L} A_\mu^2 \tilde{\Theta}.$$

Dies kann wieder leicht durch zweimalige partielle Integration bestätigt werden. Der erste Term verschwindet an der unteren Grenze wegen der ersten Bedingung II''' und berücksichtigt man die zweite Bedingung von II''', wird dieses Glied an der oberen Grenze: $\frac{2}{L} \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} \cos A_\mu \zeta$ und verschwindet ebenfalls, wenn man A_μ als positive Wurzel der Gleichung:

$$\cos A = 0, \quad \text{d. h. } A_\mu = (2\mu + 1) \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

wählt. Damit erhält man schließlich die Differentialgleichung:

$$\frac{d\tilde{\Theta}}{dt} = \gamma \tilde{\Theta} + \delta, \quad (11)$$

wobei:

$$\gamma(A_\mu, \Omega_\nu) = \frac{1}{R^2} \left\{ b R^2 - a \left[4 \left(\frac{R}{L} \right)^2 A_\mu^2 + \Omega_\nu^2 \right] \right\}, \quad (12a)$$

$$\delta(A_\mu, \Omega_\nu) = \frac{1}{\Omega_\nu A_\mu} \left[d + \frac{T_2 - T_1}{R^2} (b R^2 - a \Omega_\nu^2) \right] J_1(\Omega_\nu) \sin A_\mu \quad (12b)$$

und die noch verbleibende Anfangsbedingung lautet:

$$\tilde{\Theta}(0) = \frac{T_0 - T_2}{\Omega_\nu A_\mu} J_1(\Omega_\nu) \sin A_\mu = \varphi(A_\mu, \Omega_\nu).$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $\gamma \neq 0$, dann kann (11) umgeschrieben werden zu

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left(\tilde{\Theta} + \frac{\delta}{\gamma} \right) = \tilde{\Theta} + \frac{\delta}{\gamma}$$

und die Lösung lautet mit Berücksichtigung der Anfangsbedingung:

$$\tilde{\Theta}_1 = \varphi e^{\gamma t} + \frac{\delta}{\gamma} (e^{\gamma t} - 1). \quad (13)$$

2. $\gamma = 0$, so erreicht man durch einfache Quadratur die Lösung mit Rücksicht auf die Anfangsbedingung:

$$\tilde{\Theta}_2 = \delta t + \varphi. \quad (13')$$

Durch Rücktransformation ergibt sich daraus nun die endgültige Lösung von (4).

Entwickelt man eine Funktion $g(x)$ nach cos-Funktionen:

$$g(x) = \sum_{A_\mu} B_{A_\mu} \cos A_\mu x,$$

wo die Λ_μ die positiven Wurzeln der Gleichung $\cos \Lambda = 0$, so bestimmen sich die B_{Λ_μ} unter Berücksichtigung von:

$$\int_0^1 \cos^2 \Lambda_\mu x \cdot dx = \frac{1}{2}$$

sowie der Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen. Also schreibt sich:

$$g(x) = 2 \sum_{\Lambda_\mu} \int_0^1 g(x) \cos \Lambda_\mu x dx \cdot \cos \Lambda_\mu x.$$

Speziell in unserem betrachteten Falle:

$$\Theta = \sum_{\Lambda_\mu} P(\Lambda_\mu) \tilde{\Theta} \cos \Lambda_\mu \zeta, \quad \text{wo } P(\Lambda_\mu) = 2$$

(in diesem Falle ist $P(\Lambda_\mu)$ von Λ_μ unabhängig, was eine Folge von $\cos \Lambda_\mu = 0$ darstellt). Durch Resubstitution von (8) folgt weiters:

$$\tilde{\vartheta} = \frac{T_2 - T_1}{\Omega_\nu} J_1(\Omega_\nu) + \sum_{\Lambda_\mu} P(\Lambda_\mu) \tilde{\Theta} \cos \Lambda_\mu \zeta.$$

Dabei geht \sum_{Λ_μ} im Falle $\tilde{\Theta} = \tilde{\Theta}_1$ über alle jene Werte für die $\gamma \neq 0$ bei festem Ω_ν ,

und wenn $\tilde{\Theta} = \tilde{\Theta}_2$ über alle Λ_μ , welche $\gamma = 0$ zur Folge haben. (4'') wird auch durch die Summe der beiden Werte gelöst:

$$\begin{aligned} \tilde{\vartheta} = & \frac{T_2 - T_1}{\Omega_\nu} J_1(\Omega_\nu) + \sum_{\Lambda_\mu'} P(\Lambda_\mu) \left[\varphi e^{\gamma t} + \frac{\delta}{\gamma} (e^{\gamma t} - 1) \right] \cos \Lambda_\mu \zeta + \\ & + \sum_{\Lambda_\mu^*} P(\Lambda_\mu) (\delta t + \varphi) \cos \Lambda_\mu \zeta. \end{aligned}$$

Hierbei bedeute $\sum_{\Lambda_\mu'}$ die Summe über alle Λ_μ für die $\gamma \neq 0$ und $\sum_{\Lambda_\mu^*}$ die Summe über alle Λ_μ , für welche das nicht der Fall ist; alles bei festem Ω_ν .

In analoger Weise macht man auch die Transformation (6) rückgängig, denn betrachtet man eine Funktion $f(\varrho) = \sum_{\Omega_\nu} A_{\Omega_\nu} J_0(\Omega_\nu \varrho)$, wo die Ω_ν positive Wurzeln der Gleichung $\Omega J_1(\Omega) = h_1 J_0(\Omega)$ (h_1 eine Konstante) sind, so erhält man unter Berücksichtigung von

$$\int_0^1 \varrho J_0(\Omega_\nu \varrho) J_0(\Omega_\nu \varrho) d\varrho = \frac{h_1^2 + \Omega_\nu^2}{2 \Omega_\nu^2} J_0^2(\Omega_\nu)$$

und der Orthogonalität der Bessel-Funktionen die Koeffizienten A_{Ω_ν} . Damit folgt:

$$f(\varrho) = \sum_{\Omega_\nu} \frac{2 \Omega_\nu^2}{h_1^2 + \Omega_\nu^2} \frac{J_0(\Omega_\nu \varrho)}{J_0^2(\Omega_\nu)} \int_0^1 f(\varrho) \varrho J_0(\Omega_\nu \varrho) d\varrho$$

und man erhält mit Rücksicht auf die Substitution (5) speziell:

$$T = T_1 + \sum_{\Omega_\nu} Q(\Omega_\nu) \tilde{\vartheta} \cdot J_0(\Omega_\nu \varrho),$$

wobei:

$$Q(\Omega_\nu) = \frac{2 \Omega_\nu^2}{h_1^2 + \Omega_\nu^2} \frac{1}{J_0^2(\Omega_\nu)}.$$

Für $\tilde{\theta}$ eingesetzt:

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) \sum_{\Omega_v} \frac{J_1(\Omega_v)}{\Omega_v} Q(\Omega_v) J_0(\Omega_v \varrho) + \sum_{\Lambda_\mu^*, \Omega_v^*} P(\Lambda_\mu) Q(\Omega_v) [\varphi + \delta t] \cos \Lambda_\mu \zeta \cdot J_0(\Omega_v \varrho) + \sum_{\Lambda_\mu', \Omega_v'} P(\Lambda_\mu) Q(\Omega_v) \left[\varphi e^{\gamma t} + \frac{\delta}{\gamma} (e^{\gamma t} - 1) \right] \cos \Lambda_\mu \zeta J_0(\Omega_v \varrho). \quad (14)$$

Um nachzuweisen, daß (14) tatsächlich Lösung von (4) ist, berücksichtigt man folgende Relationen:

$$1 = \frac{L}{2} \sum_{\Lambda_\mu} P(\Lambda_\mu) \frac{\sin \Lambda_\mu}{\Lambda_\mu} \cos \Lambda_\mu \zeta, \quad (15)$$

$$1 = R^2 \sum_{\Omega_v} Q(\Omega_v) \frac{J_1(\Omega_v)}{\Omega_v} J_0(\Omega_v \varrho).$$

Damit, sowie den Beziehungen (7) und (10) folgt nach etwas längeren Rechnungen die Gültigkeit der Anfangsbedingung und der Randbedingungen, sowie daß (14) überhaupt Lösung von (4) ist.

Im Ausdruck (14) stellt die Summe über Λ_μ^* , Ω_v^* alle jene Terme dar, für welche $\gamma = 0$, d. h.:

$$I = R \pi \sqrt{\frac{\kappa \sigma_0}{\alpha j} \left[4 \left(\frac{R}{L} \right)^2 \Lambda_\mu^2 + \Omega_v^2 \right]} \quad (I \dots \text{Stromstärke}). \quad (16)$$

$\Omega_v = 0$ besagt: $h_1 = 0$, d. h. $\kappa_1 = 0$ oder $\kappa = \infty$; beides ist ausgeschlossen, denn ersteres bedeutet, es tritt kein Wärmestrom auf entgegen der Voraussetzung und das zweite, ein Material mit unendlich großer Wärmeleitfähigkeit. $\Lambda_\mu = 0$ ist ein Widerspruch zu (10). Also kann Λ_μ , $\Omega_v \neq 0$ vorausgesetzt werden.

Die kleinste Stromstärke für gegebene Drahtdimensionen und festes h_1 eines bestimmten Materials wird nach (16) offenbar durch die kleinsten Wurzeln Λ_μ , Ω_v geliefert (es soll $\gamma = 0$); dies wird um so eher erreicht, wenn R/L klein ist, so daß das Glied mit Λ_μ^2 vernachlässigt werden kann. Also wird die minimale Stromstärke:

$$I_{\min} \approx R \pi (\Omega_v)_{\min} \sqrt{\frac{\kappa \sigma_0}{\alpha j}}.$$

Eine Größenabschätzung zeigt, daß die gebräuchlichen Stromstärken kleiner als I_{\min} sind, γ also nie gleich 0 wird. $\gamma \neq 0$ besagt aber:

$$\gamma \sim \left\{ \alpha - \frac{\kappa \sigma_0}{j} \left(\frac{R \pi}{I} \right)^2 \left[4 \left(\frac{R}{L} \right)^2 \Lambda_\mu^2 + \Omega_v^2 \right] \right\}$$

und wegen obiger Überlegungen wird das zweite Glied das erste überwiegen, d. h. $\gamma < 0$. Für nicht zu große I (abhängig von der Dimensionierung des Leiters) kann der erste Term überhaupt vernachlässigt werden:

$$\gamma'(\Lambda_\mu, \Omega_v) = \frac{-\kappa}{R^2 \varrho c} \left[4 \left(\frac{R}{L} \right)^2 \Lambda_\mu^2 + \Omega_v^2 \right]. \quad (17)$$

Läßt man in (14) nun $t \rightarrow \infty$ gehen, berücksichtigt oben Gesagtes und daß $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\gamma' t} = 0$, so ergibt sich ein stationärer Zustand:

$$T = T_2 - \sum_{\Lambda_\mu, \Omega_v} P(\Lambda_\mu) Q(\Omega_v) \frac{\delta}{\gamma'} \cos \Lambda_\mu \zeta J_0(\Omega_v \varrho). \quad (14')$$

Nimmt man nun wieder an, $R/L \ll 1$ und setzt die ursprünglichen Größen ein, so erhält man aus (14'):

$$T = T_2 + A \sum_{\Lambda_\mu \Omega_\nu} \frac{1}{h_1^2 + \Omega_\nu^2} \frac{J_1(\Omega_\nu)}{\Omega_\nu J_0^2(\Omega_\nu)} \frac{\sin \Lambda_\mu}{\Lambda_\mu} \cos \Lambda_\mu \zeta J_0(\Omega_\nu \varrho) +$$
$$+ B \sum_{\Lambda_\mu \Omega_\nu} \frac{\Omega_\nu}{h_1^2 + \Omega_\nu^2} \frac{J_1(\Omega_\nu)}{J_0^2(\Omega_\nu)} \frac{\sin \Lambda_\mu}{\Lambda_\mu} \cos \Lambda_\mu \zeta J_0(\Omega_\nu \varrho), \tag{14''}$$

wobei:

$$A = 4 \left(\frac{I}{R \pi} \right)^2 \frac{j}{\kappa \sigma_0} (1 + \alpha T_2), \quad B = 4 (T_1 - T_2). \tag{18}$$

Nun erkennt man auch den Sinn der Transformationen $r = \varrho R$ und $z = \zeta \cdot L/2$; damit wurde nämlich erreicht, daß hinter den Summenzeichen nur dimensionslose Größen stehen, was für die numerische Berechnung von Vorteil ist.

An $r = 0$ und $z = 0$ liegt, wie zu erwarten ist, ein Maximum vor und die Summen ändern sich nur mit dem Wärmeübergang.

Hier sei noch bemerkt, daß es unter Umständen von Bedeutung sein kann, nicht eine Randbedingung der Form II vorzugeben, sondern etwa:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{T(r, 0; t)} = 0 \quad \text{und} \quad \left(k_2 T + \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{T(r, \frac{L}{2}; t)} = K_2.$$

Dann ändert sich am Gang der Rechnung nichts, nur erfüllen die Λ_μ nicht mehr (10), sondern die Gleichung $\Lambda \operatorname{tg} \Lambda - h_2 = 0$ mit $h_2 = k_2 L/2$. Dementsprechend ändert sich auch der Wert von $P(\Lambda_\mu)$ ab zu:

$$P(\Lambda_\mu) = \frac{2(\Lambda_\mu^2 + h_2^2)}{\Lambda_\mu^2 + h_2^2 + h_2}.$$

Nun zurück zu unseren Gl. (14'') und (18). Bei weiterer Spezialisierung auf $B = 0$, d. h. $T_1 = T_2$ erhält man:

$$T = T_2 + A \sum_{\Lambda_\mu \Omega_\nu} \frac{1}{h_1^2 + \Omega_\nu^2} \frac{J_1(\Omega_\nu)}{\Omega_\nu J_0^2(\Omega_\nu)} \frac{\sin \Lambda_\mu}{\Lambda_\mu} \cos \Lambda_\mu \zeta J_0(\Omega_\nu \varrho).$$

4. Als Beispiel sei vorgegeben: $T_1 = T_2 = 20^\circ \text{C}$, $R = 0.5 \text{ cm}$, $I = 100 \text{ A}$; der Stab bestehe aus Eisen und das umgebende Medium sei Luft. Unter der Voraussetzung erzwungener Konvektion, d. h.

$$h_1 = \frac{\lambda}{2 \kappa} \text{Nu}, \tag{19}$$

wobei λ die Wärmeleitzahl des umgebenden Mediums und Nu die Nusseltsche Kennzahl darstellt, ergibt sich Abb. 2 für $h_1 = 0.01$. Dabei berechnet sich Nu gemäß: $\text{Nu} = C \cdot (\text{Re})^n (\text{Pr})^m$ ($\text{Re} \dots$ Reynoldssche und $\text{Pr} \dots$ Prandtl'sche Zahl); dies wird für Luft: $\text{Nu} = C' (\text{Re})^n$, wo:

| Re | | C' | n |
|-------|--------|--------|-------|
| von | bis | | |
| 4 | 40 | 0.821 | 0.385 |
| 40 | 4000 | 0.615 | 0.466 |
| 4000 | 40000 | 0.174 | 0.618 |
| 40000 | 400000 | 0.0239 | 0.805 |

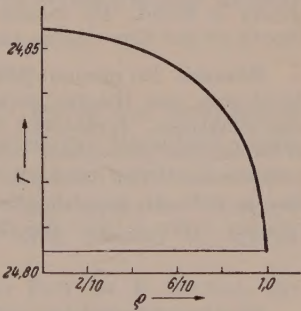


Abb. 2. Temperaturverteilung des Querschnittes.

¹ Hilpert: Z. Forschung 1933.

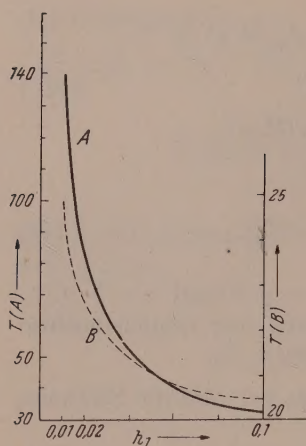


Abb. 3. Oberflächentemperatur in Abhängigkeit des Wärmeüberganges. A entspricht 500 A, B entspricht 100 A.

Zeichnet man noch die Oberflächentemperatur als Funktion von h_1 (und damit von Nu), so ergibt sich Abb. 3. Mit wachsendem Nu nähert sich die Oberflächentemperatur der Temperatur des umgebenden Mediums [$h_1 = 0.01$ entspricht nach (19) etwa $Nu \approx 40$]. Die 500 A entsprechende Kurve wird den geringsten Anspruch auf Übereinstimmung mit der Erfahrung haben, da bei kleinen h_1 bereits so große Temperaturen erzielt werden, für welche die Wärmestrahlung nicht mehr vernachlässigt werden darf. Auf Grund von Abb. 2 erkennt man eine sehr geringe Temperaturdifferenz zwischen Drahtachse und Oberfläche; sie beträgt im Falle $h_1 = 0.01$ etwa 0.19% und für $h_1 = 0.1$ etwa 0.12%. Damit erscheint also das Temperaturfeld im Inneren des Zylinders für die meisten Probleme, wie z. B. für Fragen der Überstrukturbildung, weitgehend homogen. Über die Temperaturverteilung in der z -Richtung ist noch zu bemerken, daß diese an der Oberfläche um $z = 0$ ein Plateau bildet und erst gegen die Stabenden zu merklich abfällt. Man hat also von der Stabmitte nach beiden Seiten weitgehend konstante Temperatur.

Abschließend möchte ich noch Herrn Dr. W. Frank für die anregenden Diskussionen herzlichst danken.

(Eingegangen am 23. Dezember 1952.)

Der rotationssymmetrische elastisch-plastische Körper.

Von H. Jung, Stuttgart.

Mit 1 Textabbildung.

Zusammenfassung. Ausgehend von einem Volumenelement des deformierten Körpers wird eine Theorie aufgebaut, die es gestattet, den elastisch-plastischen Körper mathematisch zu erfassen. Das Wesentliche hierbei ist, daß angenommen wird, die Hauptverzerrungsrichtungen fallen mit den Hauptspannungsrichtungen, die jeweils auf den deformierten Körper bezogen werden, zusammen. Mit diesen Annahmen wird dann eine allgemeine Theorie aufgebaut. Durch Vereinfachungen läßt sich dann mit den Ergebnissen eine Theorie erster Ordnung und eine Theorie zweiter Ordnung herleiten.

Summary. Starting from a volume element of the body deformed a theory is evolved permitting of mathematically conceiving the elastico-plastic body. The essential feature of this method is to take the main deformation directions as tallying with the directions of the main stresses which are always made to refer to the deformed body. On these assumptions a general theory is based. By means of simplifications these results can then be utilized for evolving a theory of the first degree and a theory of the second degree.

Résumé. En prenant pour base de ses études un élément du volume du corps déformé l'auteur développe une théorie permettant de concevoir le corps élastico-plastique du point de vue mathématique. L'essentiel dans ce mode de procéder c'est la supposition que les directions des déformations principales coïncident avec les directions des tensions principales qui se réfèrent toujours au corps déformé. C'est sur ces suppositions que l'auteur établit une théorie générale. Par la voie de simplifications les résultats sont enfin utilisés pour développer une théorie de premier ordre et une théorie de second ordre.

I. Einleitung.

In der klassischen Elastizitätstheorie und Plastizitätstheorie ging man bisher von der Voraussetzung aus, daß die Verschiebungen klein von erster Ordnung sind. Diese Voraussetzung läßt sich bei vielen technischen Formgebungsverfahren (Ziehen, Tiefziehen, Prägen) nicht immer aufrechterhalten.

Ausgehend vom rotationssymmetrischen isotropen Körper werden in Ziffer II solche Forderungen aufgestellt, die als Grundannahmen zum Aufbau einer technischen Elastizitäts-Plastizitäts-Theorie vertreten werden können. In Ziffer III werden die Dehnungen und Verschiebungen sowie die Invarianten des Formänderungstensors hergeleitet und in eine handliche Form gebracht. Im Anschluß daran werden die Invarianten des Spannungstensors angegeben und die Gleichgewichtsbedingungen in einer für die Rechnung besonders günstigen Form dargestellt. Das Elastizitäts-Plastizitäts-Gesetz wird in Ziffer IV aufgestellt und es wird der Zusammenhang mit den Ansätzen von Mises-Saint Venant und Kauderer aufgezeigt. Die Differentialgleichungen für die Verschiebungen werden in Ziffer V hergeleitet. Mit den in Ziffer V erhaltenen Ergebnissen wird eine Theorie erster Ordnung (Ziffer VI) und eine Theorie zweiter Ordnung (Ziffer VII) gewonnen. Lösungen der Differentialgleichungen mit vorgegebenen Randbedingungen für den rotationssymmetrischen elastisch-plastischen Körper werden in Ziffer VIII hergeleitet. Die Bestimmung der Verfestigungsfunktion wird dann in Ziffer IX durchgeführt. Die Anwendung auf ein technisches Problem (Niederhalterdruck beim Tiefziehen) wird in Teil II gezeigt¹, wobei sich eine gute Übereinstimmung mit den bekannten Versuchsergebnissen ergibt.

II. Problemstellung.

Gegeben sind die rotationssymmetrischen Verschiebungen an der Oberfläche eines rotationssymmetrischen isotropen Körpers. Die Dehnungen und Schiebungen im Inneren seien stetige und stetig differenzierbare Funktionen in den Koordinaten r und z . Ist der Zusammenhang zwischen diesen Formänderungen und den Spannungen durch das Gesetz von Roß-Eichinger² gegeben, so muß das Elastizitäts-Plastizitäts-Gesetz auch bei Verfestigungsfunktionen mit nicht stetiger Ableitung auf stetige Spannungen führen. Diese Forderung läßt sich in der klassischen Plastizitätstheorie nicht immer erfüllen. Bei der Aufstellung des Gesetzes ist dann ferner noch zu beachten, daß beim Übergang zu kleinen Formänderungen die von Mises-Saint Venant³ aufgestellten Bedingungen

$$\sigma_i - \sigma_0 = \lambda \varepsilon_i$$

erfüllt sind, wobei mit σ_i ($i = 1, 2, 3$) die Hauptspannungen, σ_0 der Mittelwert der Hauptspannungen und mit ε_i die entsprechenden Dehnungen bezeichnet werden. Bei kleineren Formänderungen muß sich dann noch das von H. Kauderer⁴ erweiterte Elastizitätsgesetz ergeben. Außer diesen Bedingungen, die zur Nachprüfung des aufgestellten Gesetzes herangezogen werden können, wird noch gefordert, daß während des gesamten Deformationsvorganges das Volumen konstant bleibt und die Formänderungsgeschwindigkeiten so klein sind, daß die Massenkräfte vernachlässigt werden dürfen.

III. Die Formänderungen und Spannungen.

Gegeben sei ein rotationssymmetrischer isotroper Körper. Durch ein technisches Formgebungsverfahren werden dem Körper rotationssymmetrische Verschiebungen aufgezwungen, die nicht mehr als klein von erster Ordnung angesehen werden können. Wie aus Versuchen bekannt ist, kann bei diesen Vorgängen ein konstantes Volumen angenommen werden. Das Material des Körpers befindet sich hierbei in einem

¹ Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit verdanke ich Herrn Prof. Dr. E. Siebel, der mir insbesondere bei der Durchrechnung des Tiefziehvorganges wertvolle Anregungen gab.

² M. Roß und A. Eichinger: Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr (s. Fußnote 1, S. 3). Zürich. 1926.

³ R. v. Mises: Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. 582 (1913).

⁴ H. Kauderer: Ingenieur-Arch. 17, 450 (1949).

elastisch-plastischen Zustand, der durch das Verfestigungsgesetz von Roß-Eichinger⁵

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_0)^2 + (\sigma_2 - \sigma_0)^2 + (\sigma_3 - \sigma_0)^2} = f \left(\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_0)^2} \right) \quad (1)$$

gegeben ist. Um den Zusammenhang zwischen den Spannungen und Dehnungen aufzustellen, soll zuerst der Verschiebungszustand des Körpers untersucht werden.

Ist \bar{P} mit den Koordinaten \bar{r} , \bar{z} und $\bar{\varphi}$ ein Punkt des undeformierten Körpers, so geht bei der Deformation dieser Punkt in P mit den Koordinaten r , z und φ über. Im folgenden sollen nur rotationssymmetrische Probleme behandelt werden, so daß

$$\varphi = \bar{\varphi}$$

ist. Bezeichnet man mit u die Verschiebung in radialer Richtung, w die Verschiebung in axialer Richtung, so ist der Zusammenhang der Koordinaten gegeben durch

$$\bar{r} = r - u(r, z), \quad (2)$$

$$\bar{z} = z - w(r, z). \quad (3)$$

Bezieht man die Verzerrungen des Körpers auf den deformierten Zustand, so erhält man unter Berücksichtigung der Größen zweiter Ordnung

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{u}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{r} \right)^2, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right], \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Mit (4) wird der Formänderungstensor

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 & \frac{1}{2} \gamma \\ 0 & \varepsilon_\varphi & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Die Invarianten von (5) sind

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ J_2 &= \varepsilon_r \varepsilon_\varphi + \varepsilon_r \varepsilon_z + \varepsilon_\varphi \varepsilon_z - \frac{1}{4} \gamma^2 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3, \\ J_3 &= \varepsilon_r \varepsilon_\varphi \varepsilon_z - \frac{1}{4} \varepsilon_\varphi \gamma^2 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Die Bedingung für konstantes Volumen lautet mit (6)

$$J_1 - 2 J_2 + 4 J_3 = 0. \quad (7)$$

Geht man mit (6) in (1) ein, so ist

$$\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_0)^2} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{3} J_1^2 - J_2}. \quad (8)$$

Setzt man die Formänderungen klein von erster Ordnung voraus und vernachlässigt die Größen zweiter und höherer Ordnung, so sind die Dehnungen und Schiebungen

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_\varphi &= \frac{u}{r}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

⁵ Siehe Fußnote 2.

Mit (9) geht (7) über in

$$3 \varepsilon_0 = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = 0. \quad (10)$$

Zerlegt man (5) in einen Kugeltensor und einen Deviator, so ist mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_r' &= \varepsilon_r - \varepsilon_0, \\ \varepsilon_\varphi' &= \varepsilon_\varphi - \varepsilon_0, \\ \varepsilon_z' &= \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{aligned}$$

der Formänderungstensor

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_r' & 0 & \frac{1}{2} \gamma \\ 0 & \varepsilon_\varphi' & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma & 0 & \varepsilon_z' \end{pmatrix} = \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}'. \quad (11)$$

Geht man mit (10) in (11) ein, so wird

$$\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{S}'.$$

Die Bedingung (8) geht damit über in

$$\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} = \sqrt{2} \sqrt{-J_2}.$$

Für den elastisch-plastischen Körper werden die Gleichgewichtsbedingungen am deformierten Körper aufgestellt, da zu allen Zeiten t des Deformationsvorganges die Volumenelemente des Körpers im Gleichgewicht sein müssen.

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Die am Volumenelement angreifenden Spannungen sind die Komponenten des Tensors

$$\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 & \tau \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ \tau & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Zerlegt man den Tensor (13) in einen Kugeltensor und einen Deviator, so ist mit den Abkürzungen

$$\sigma_r' = \sigma_r - \sigma_0, \quad \sigma_\varphi' = \sigma_\varphi - \sigma_0, \quad \sigma_z' = \sigma_z - \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z)$$

der Spannungstensor

$$\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_r' & 0 & \tau \\ 0 & \sigma_\varphi' & 0 \\ \tau & 0 & \sigma_z' \end{pmatrix} = \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}'. \quad (14)$$

Die Invarianten von (13) sind

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z = 3 \sigma_0 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ P_2 &= \sigma_r \sigma_\varphi + \sigma_r \sigma_z + \sigma_\varphi \sigma_z - \tau^2 &= \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3, \\ P_3 &= \sigma_r \sigma_\varphi \cdot \sigma_z - \sigma_\varphi \tau^2 &= \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Geht man mit (15) in (1) ein, so erhält man

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_0)^2 + (\sigma_2 - \sigma_0)^2 + (\sigma_3 - \sigma_0)^2} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{3} P_1^2 - P_2}. \quad (16)$$

Das Verfestigungsgesetz von Roß-Eichinger lautet damit in Tensorinvarianten geschrieben:

$$\sqrt{2} \left[\sqrt{\frac{1}{3} P_1^2 - P_2} = f \left[\sqrt{2} \left[\sqrt{\frac{1}{3} J_1^2 - J_2} \right] \right]. \quad (1a)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (12) lassen sich in den Größen des Kugeltensors und des Deviators ausdrücken. Es ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r'}{\partial r} + \frac{\sigma_r' - \sigma_\varphi'}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} &= -\frac{\partial \sigma_0}{\partial r}, \\ \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} + \frac{\partial \sigma_z'}{\partial z} &= -\frac{\partial \sigma_0}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\sigma_I = \sigma_r' - \sigma_z', \quad \sigma_{II} = \sigma_r' - \sigma_\varphi'$$

und eliminiert σ_0 aus den Gl. (17), so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \sigma_I + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{II} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \tau &= 0, \\ -\sigma_0 \left\{ \begin{aligned} &= \sigma_r' + \int \left(\frac{\sigma_r' - \sigma_\varphi'}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \right) dr + F_1(z), \\ &= \sigma_z' + \int \left(\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} \right) dz + F_2(r). \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

IV. Das Elastizitäts-Plastizitäts-Gesetz.

Für kleine Formänderungen gilt nach Mises⁶

$$\sigma_r' = \lambda \varepsilon_r', \quad \sigma_\varphi' = \lambda \varepsilon_\varphi', \quad \sigma_z' = \lambda \varepsilon_z', \quad \tau = \frac{1}{2} \lambda \gamma, \quad (19)$$

wobei λ noch eine Funktion des Ortes ist.

Die Gl. (19) lassen sich auch in Tensorform schreiben:

$$\frac{\mathfrak{P}'}{\sqrt{-P_2'}} = \frac{\mathfrak{S}'}{\sqrt{-J_2}}. \quad (19a)$$

Das Verfestigungsgesetz für kleine Formänderungen lautet damit

$$\sqrt{2} \sqrt{-P_2'} = f \left[\sqrt{2} \sqrt{-J_2} \right]. \quad (20)$$

Geht man mit (20) in (19a) ein, so wird

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{S}' \frac{f[\sqrt{2} \sqrt{-J_2}]}{\sqrt{2} \sqrt{-J_2}} = \mathfrak{S}' g(\sqrt{2} \sqrt{-J_2}). \quad (21)$$

In (21) bedeutet $g(\sqrt{2} \sqrt{-J_2})$ eine beliebige auch nichtstetige Funktion, die nur von den Materialeigenschaften abhängt.

Mit (21) wird

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r' &= \varepsilon_r g(\sqrt{2} \sqrt{-J_2}), \\ \sigma_\varphi' &= \varepsilon_\varphi g(\sqrt{2} \sqrt{-J_2}), \\ \sigma_z' &= \varepsilon_z g(\sqrt{2} \sqrt{-J_2}), \\ \tau &= \frac{1}{2} \gamma g(\sqrt{2} \sqrt{-J_2}). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Bei großen Formänderungen sei der Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verschiebungen gegeben durch

$$\frac{\mathfrak{P}'}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{3} P_1^2 - P_2}} = \frac{\mathfrak{S}}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{3} J_1^2 - J_2}}. \quad (23)$$

⁶ Siehe Fußnote 3 auf S. 169.

Mit (23) und (1a) erhält man

$$\mathfrak{P} = \frac{f \left[\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{3} J_1^2 - J_2} \right]}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{3} J_1^2 - J_2}} = \varpi g \left(\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{3} J_1^2 - J_2} \right). \quad (24)$$

Dieser Ansatz ist allgemeiner als das Gesetz von Mises-Roš-Eichinger und ergibt dieses beim Übergang zu kleinen Formänderungen. In Komponenten ist

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r' &= \varepsilon_r g \left[\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{3} J_1^2 - J_2} \right], \\ \sigma_\varphi' &= \varepsilon_\varphi g \left[\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{3} J_1^2 - J_2} \right], \\ \sigma_z' &= \varepsilon_z g \left[\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{3} J_1^2 - J_2} \right], \\ \tau &= \frac{1}{2} \gamma g \left[\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{3} J_1^2 - J_2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Die Differentialgleichungen für die Verschiebungen lassen sich mit (25) und (18) aufstellen.

Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß die Gl. (22) mit denen von H. Kauderer⁷ aufgestellten übereinstimmen, wenn dort $\varepsilon_0 = 0$ gesetzt wird.

V. Die Differentialgleichungen für die Verschiebungen.

Mit (25) wird

$$\left. \begin{aligned} \sigma_I &= \varepsilon_I g \left[\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{3} J_1^2 - J_2} \right] = \varepsilon_I g [\sqrt{2} \sqrt{K}], \\ \sigma_{II} &= \varepsilon_{II} g \left[\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{3} J_1^2 - J_2} \right] = \varepsilon_{II} g [\sqrt{2} \sqrt{K}]. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Zur Abkürzung wurde in (26) gesetzt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_I &= \varepsilon_r - \varepsilon_z, \\ \varepsilon_{II} &= \varepsilon_r - \varepsilon_\varphi, \\ K &= \frac{1}{3} J_1^2 - J_2. \end{aligned}$$

Geht man mit (26) in (18) ein, so erhält man die Differentialgleichung

$$\psi_3 = \frac{d^2 g [\sqrt{2} \sqrt{K}]}{d(\sqrt{2} K)^2} + \psi_2 \frac{dg [\sqrt{2} \sqrt{K}]}{d(\sqrt{2} K)} + \psi_1 g [\sqrt{2} \sqrt{K}] = 0. \quad (27)$$

Die Abkürzung in (27) sind:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\partial^2 \varepsilon_I}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{II}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{2r} \frac{\partial \gamma}{\partial r} + \frac{1}{2r^2} \gamma, \\ \psi_2 &= \frac{\partial \varepsilon_I}{\partial z} \cdot \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial r} + \varepsilon_I \frac{\partial^2 \sqrt{K}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \varepsilon_{II} \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \cdot \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial z} + \frac{1}{2} \gamma \frac{\partial^2 \sqrt{K}}{\partial z^2} - \\ &\quad - \frac{\partial \gamma}{\partial r} \cdot \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial r} - \frac{1}{2} \gamma \frac{\partial^2 \sqrt{K}}{\partial r^2} - \frac{1}{2r} \gamma \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial r}, \\ \psi_3 &= \varepsilon_I \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial z} + \frac{1}{2} \gamma \left[\left(\frac{\partial \sqrt{K}}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \sqrt{K}}{\partial r} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

⁷ Siehe Fußnote 4 auf S. 169.

Gl. (27) gilt für den elastischen und plastischen Bereich. Die Verfestigungsfunktion des Materials sei durch Abb. 1 gegeben.

Gibt man die Verschiebungen u und w des Körpers so vor, daß sie den Bedingungen

$$\psi_1 = 0; \quad \psi_2 = 0; \quad \psi_3 = 0 \quad (29)$$

genügen, so ist dadurch eine von der Verfestigungsfunktion des Körpers unabhängige Lösung der Differentialgleichung (27) gegeben.

Aus der Materialprüfung ist bekannt, daß unabhängig vom Material bei vielen Beanspruchungsarten sich gleiche bzw. ähnliche Verschiebungszustände ergeben, so daß die Forderung (29) zu brauchbaren mit der Wirklichkeit übereinstimmenden Lösungen führt. Die im Körper auftretenden Spannungen sind nach (25) von der Verfestigungsfunktion noch abhängig.

Entwickelt man die Verfestigungsfunktion $f(K)$ in eine Potenzreihe, so ist

$$g(\sqrt{2} \sqrt{K}) = \frac{\alpha}{\sqrt{2} K} + \beta + \vartheta \sqrt{2} K + \dots \quad (30)$$

Setzt man in (30)

$$\beta = \vartheta = \dots = 0,$$

dann erhält man den plastischen Körper von Prandtl. Bemerkenswert ist nun, daß, um auch bei diesem Körper auf eine eindeutige Lösung zu kommen,

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = 0$$

gefordert werden muß.

Wird in (30)

$$\alpha = \vartheta = \dots = 0$$

gesetzt, so ergibt sich der rein elastische Körper. Da hierbei nun

$$\frac{d^2 g(\sqrt{2} \sqrt{K})}{d(\sqrt{K})^2} \equiv \frac{dg(\sqrt{2} \sqrt{K})}{d(\sqrt{K})} \equiv 0$$

ist, so muß für diesen Körper nur

$$\psi_1 = 0$$

gefordert werden. Dies führt, wie leicht nachgewiesen werden kann, auf die Lovesche Verschiebungsfunktion mit der Nebenbedingung

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = 0.$$

Damit ist gezeigt, daß durch (29) die strenge Elastizitätstheorie mit erfaßt wird. Hierzu ist zu bemerken, daß bei großen Formänderungen der Verschiebungszustand eines rein elastischen Körpers nicht mehr eindeutig gegeben ist, da die Verzerrungen quadratische Funktionen in den Ableitungen der Verschiebungen sind.

VI. Theorie erster Ordnung.

Das Gleichungssystem (29) läßt sich nun noch vereinfachen. Mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial r} &= \frac{1}{2 \sqrt{K}} \cdot \frac{\partial K}{\partial r}, \\ \frac{\partial^2 \sqrt{K}}{\partial r^2} &= -\frac{1}{4} \frac{1}{K^{3/2}} \left(\frac{\partial K}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2 \sqrt{K}} \frac{\partial^2 K}{\partial r^2}, \\ \frac{\partial^2 \sqrt{K}}{\partial z^2} &= -\frac{1}{4} \frac{1}{K^{3/2}} \left(\frac{\partial K}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2 \sqrt{K}} \frac{\partial^2 K}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 \sqrt{K}}{\partial r \partial z} &= -\frac{1}{4} \frac{1}{K^{3/2}} \frac{\partial K}{\partial r} \cdot \frac{\partial K}{\partial z} + \frac{1}{2 \sqrt{K}} \frac{\partial^2 K}{\partial r \partial z} \end{aligned}$$

geht man in (29) ein und erhält

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\text{I}}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{\text{II}}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{2r} \frac{\partial \gamma}{\partial r} + \frac{1}{2r^2} \gamma = 0, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{\text{I}}}{\partial z} \cdot \frac{\partial K}{\partial r} + \varepsilon_{\text{I}} \frac{\partial^2 K}{\partial r \partial z} + \frac{\varepsilon_{\text{II}}}{r} \cdot \frac{\partial K}{\partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \cdot \frac{\partial K}{\partial z} + \frac{1}{2} \gamma \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} - \\ - \frac{\partial \gamma}{\partial r} \cdot \frac{\partial K}{\partial r} - \frac{1}{2} \gamma \frac{\partial^2 K}{\partial r^2} - \frac{1}{2r} \gamma \cdot \frac{\partial K}{\partial r} = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\varepsilon_{\text{I}} \frac{\partial K}{\partial z} \cdot \frac{\partial K}{\partial r} + \frac{1}{2} \gamma \left[\left(\frac{\partial K}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial K}{\partial r} \right)^2 \right] = 0, \quad (33)$$

$$J_1 - 2J_2 + 4J_3 = 0. \quad (34)$$

Sind die Dehnungen und Schiebungen klein von erster Ordnung, so können ihre Quadrate gegenüber den linearen Gliedern vernachlässigt werden. J_2 , J_3 und K enthalten damit nur noch Glieder, die klein zweiter Ordnung bzw. höherer Ordnung sind, so daß (27) befriedigt ist. Bei kleinen Formänderungen genügen die Verschiebungen den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\text{I}}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{\text{II}}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{2r} \frac{\partial \gamma}{\partial r} + \frac{1}{2r^2} \gamma = 0, \quad (35)$$

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = 0. \quad (36)$$

Setzt man in (35) und (36)

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{\text{I}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2},$$

$$\varepsilon_{\text{II}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r},$$

$$\gamma = 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}$$

ein, so erhält man mit dem Operator

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

die Differentialgleichung für die Verschiebungsfunktion

$$\Delta \Phi = 0. \quad (37)$$

Die Spannungen sind damit

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r' &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} g \left[\sqrt{2} \sqrt{-\varepsilon_r \varepsilon_\varphi - \varepsilon_r \varepsilon_z - \varepsilon_\varphi \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma^2} \right], \\ \sigma_\varphi' &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} g \left[\sqrt{2} \sqrt{-\varepsilon_r \varepsilon_\varphi - \varepsilon_r \varepsilon_z - \varepsilon_\varphi \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma^2} \right], \\ \sigma_z' &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} g \left[\sqrt{2} \sqrt{-\varepsilon_r \varepsilon_\varphi - \varepsilon_r \varepsilon_z - \varepsilon_\varphi \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma^2} \right], \\ \tau &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} g \left[\sqrt{2} \sqrt{-\varepsilon_r \varepsilon_\varphi - \varepsilon_r \varepsilon_z - \varepsilon_\varphi \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Der dem Kugeltensor σ_0 zugehörige Spannungszustand ist dann durch (17) bestimmt.

Geht man mit (38) in (17) ein und streicht wieder die quadratischen Glieder, so ist

$$\sigma_0 = K_0. \quad (39)$$

Die im Körper wirkenden effektiven Spannungen sind

$$\sigma_r = \sigma_r' + \sigma_0, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\varphi' + \sigma_0, \quad \sigma_z = \sigma_z' + \sigma_0, \quad \tau = \tau. \quad (40)$$

Diese Theorie erster Ordnung wird besonders für Prägevorgänge und Biegevorgänge bei nicht zu großem Biegefeil in Betracht kommen.

VII. Theorie zweiter Ordnung.

Berücksichtigt man in J_1 , J_2 , K noch die quadratischen Glieder und nimmt die Glieder dritter und höherer Ordnung als vernachlässigbar klein an, dann wird $J_3 = 0$. Die Verschiebungen u , w müssen nun das System von Differentialgleichungen erfüllen.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_I}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{II}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{2r} \frac{\partial \gamma}{\partial r} + \frac{1}{2r^2} \gamma = 0, \quad (41a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_I \frac{\partial K}{\partial r} \right) + \frac{\partial K}{\partial z} \left(\frac{\varepsilon_{II}}{r} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\partial^2 K}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial r^2} - \frac{1}{2r} \frac{\partial K}{\partial r} \right) - \frac{\partial \gamma}{\partial r} \cdot \frac{\partial K}{\partial r} = 0, \quad (41b)$$

$$J_1 - 2J_2 = 0. \quad (41c)$$

Mit (41c) wird

$$\sqrt{2} \sqrt{K} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{3} J_1^2 - \frac{1}{2} J_1}. \quad (42)$$

Damit die hier geforderte Lösung existiert, muß verlangt werden

$$\frac{1}{3} J_1^2 - \frac{1}{2} J_1 \geq 0. \quad (43)$$

Setzt man in (43) $J_1 = 0$, so wird (41b) identisch befriedigt. Mit $K = 0$ geht die Verfestigungsfunktion in die Hookesche Gerade über. Hierfür lauten die Differentialgleichungen für die Verschiebungen

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = 0, \quad (44a)$$

$$\varepsilon_r \varepsilon_\varphi + \varepsilon_r \varepsilon_z + \varepsilon_\varphi \varepsilon_z - \frac{1}{4} \gamma^2 = 0, \quad (44b)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_I}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{II}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{2r} \frac{\partial \gamma}{\partial r} + \frac{1}{2r^2} \gamma = 0. \quad (44c)$$

Die Verschiebungen müssen so bestimmt werden, daß (44) befriedigt wird.

Ist $J_1 \neq 0$, so formt man das Gleichungssystem (41) um. Setzt man

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial r} &= \frac{\partial K}{\partial J_1} \cdot \frac{\partial J_1}{\partial r}, & \frac{\partial^2 K}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 K}{\partial J_1^2} \left(\frac{\partial J_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial K}{\partial J_1} \cdot \frac{\partial^2 J_1}{\partial r^2}, \\ \frac{\partial K}{\partial z} &= \frac{\partial K}{\partial J_1} \cdot \frac{\partial J_1}{\partial z}, & \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 K}{\partial J_1^2} \left(\frac{\partial J_1}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial K}{\partial J_1} \cdot \frac{\partial^2 J_1}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 K}{\partial r \partial z} &= \frac{\partial^2 K}{\partial J_1^2} \cdot \frac{\partial J_1}{\partial r} \cdot \frac{\partial J_1}{\partial z} + \frac{\partial K}{\partial J_1} \cdot \frac{\partial^2 J_1}{\partial r \partial z}, \end{aligned}$$

und geht damit in (41b) ein, so wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial J_1} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_I}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial r} - \frac{1}{2r} \gamma \right) \frac{\partial J_1}{\partial r} + \left(\frac{\varepsilon_{II}}{r} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) \frac{\partial J_1}{\partial z} + \varepsilon_I \frac{\partial^2 J_1}{\partial r \partial z} + \frac{1}{2} \gamma \frac{\partial^2 J_1}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \gamma \frac{\partial^2 J_1}{\partial r^2} \right] + \\ + \frac{\partial^2 K}{\partial J_1^2} \left\{ \varepsilon_I \frac{\partial J_1}{\partial r} \cdot \frac{\partial J_1}{\partial z} + \frac{1}{2} \gamma \left[\left(\frac{\partial J_1}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial J_1}{\partial r} \right)^2 \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

In (45) ist die zweite eckige Klammer klein von dritter Ordnung, so daß an Stelle von (41b) die Gleichung tritt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varepsilon_I}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial r} - \frac{1}{2r} \gamma \right) \frac{\partial J_1}{\partial r} + \left(\frac{\varepsilon_{II}}{r} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) \frac{\partial J_1}{\partial z} + \varepsilon_I \frac{\partial^2 J_1}{\partial r \partial z} + \frac{1}{2} \gamma \frac{\partial^2 J_1}{\partial z^2} - \\ - \frac{1}{2} \gamma \frac{\partial^2 J_1}{\partial r^2} = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Einen Anhaltspunkt zur Gewinnung von Lösungen des Gleichungssystems (41) erhält man, wenn

$$\varepsilon_r = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad \gamma = 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} \quad (47)$$

gesetzt wird. Dabei ist Φ eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen r und z . Damit ist (41a) identisch erfüllt. Die Gl. (41c) und (46) gehen über in

$$\Delta \Phi = 2 \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} \right)^2 \right], \quad (47a)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z^2} \right] \frac{\partial}{\partial z} \Delta \Phi - \frac{\partial}{\partial z} \Delta \Phi \cdot \frac{\partial}{\partial r} \Delta \Phi + \\ & + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \Delta \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Delta \Phi = 0. \end{aligned} \quad (47b)$$

Setzt man in (47) $\Phi = \psi(r)$, so erhält man für den ebenen Formänderungszustand die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d^2 \psi}{dr^2} \cdot \frac{d\psi}{dr}, \quad (48)$$

die sich streng lösen läßt.

Damit ist gezeigt, daß auch die Theorie zweiter Ordnung auf auswertbare Lösungen führt, wobei die Frage noch offen ist, ob aus den Verzerrungen die Verschiebungen sich eindeutig bestimmen lassen. Bei technischen Problemen ist es zweckmäßig, von der Theorie erster Ordnung auszugehen und mit Hilfe der Störungsrechnung die Gl. (41) näherungsweise zu befriedigen.

VIII. Lösungen für den elastisch-plastischen Körper.

a) Der Zugversuch.

Macht man für die Verschiebungen den Ansatz

$$u = F(r), \quad w = w(z) \quad (49)$$

und geht in (4) ein, so wird

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)^2, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{F}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{F}{r} \right)^2, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2, \\ \gamma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Mit (50) gehen die Gl. (31) bis (34) über in

$$\frac{\partial \varepsilon_I}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{II}}{\partial z} = 0, \quad (51)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_I \frac{\partial K}{\partial r} \right) + \frac{\varepsilon_{II}}{r} \frac{\partial K}{\partial z} = 0, \quad (52)$$

$$\varepsilon_I \frac{\partial K}{\partial z} \cdot \frac{\partial K}{\partial r} = 0, \quad (53)$$

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z - 2 \varepsilon_r \varepsilon_\varphi - 2 \varepsilon_r \varepsilon_z - 2 \varepsilon_\varphi \varepsilon_z + 4 \varepsilon_r \varepsilon_\varphi \varepsilon_z = 0. \quad (54)$$

Setzt man $\varepsilon_z = -K_0$, so werden die Gl. (51) bis (53) befriedigt. Aus (54) folgt

$$K_0 (1 - 2 \varepsilon_r - 2 \varepsilon_\varphi + 4 \varepsilon_r \varepsilon_\varphi) = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi - 2 \varepsilon_r \varepsilon_\varphi, \quad (55)$$

oder umgeformt ergibt sich

$$\frac{K_0}{2 K_0 + 1} = \varepsilon_r (1 - \varepsilon_\varphi) + \varepsilon_\varphi (1 - \varepsilon_r). \quad (56)$$

Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung für $F(r)$, wodurch $F(r)$ bis auf eine Konstante bestimmt ist. Ein partikuläres Integral dieser Differentialgleichung lautet

$$F(r) = c \cdot r, \quad (57)$$

wobei

$$c = 1 - \sqrt{1 - 2\mu},$$

$$\mu = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4 + \frac{2}{K_0}}},$$

zu setzen ist. Damit wird

$$\left. \begin{aligned} u &= r (1 - \sqrt{1 - 2\mu}), \\ w &= z (1 - \sqrt{1 - 2K_0}). \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Mit (58) werden die Spannungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \mu g (\sqrt{2} \sqrt{K}) + c_0, \\ \sigma_\varphi &= \mu g (\sqrt{2} \sqrt{K}) + c_0, \\ \sigma_z &= K_0 g (\sqrt{2} \sqrt{K}) + c_0. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Die Randbedingung $\sigma_r = 0$ für $r = r_a$ führt auf

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\varphi = 0, \\ \sigma_z &= (K_0 - \mu) g (\sqrt{2} \sqrt{K}). \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Durch (60) ist der Zusammenhang zwischen den Dehnungen und Spannungen beim einachsigen Spannungszustand gegeben. Hierbei ist zu beachten, daß die Dehnung

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \approx \frac{\Delta L}{L} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2$$

ist. Im Rahmen der Gleichmaßdehnung läßt sich (60) zur Bestimmung der Verfestigungsfunktion heranziehen.

Beginnt sich der Stab einzuschnüren, so ist die Bedingung

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_\varphi = 0$$

für alle z nicht mehr erfüllt, so daß die Verfestigungsfunktion in ihrem gesamten Verlauf nicht durch den Zugversuch ermittelt werden kann. Aus diesem Grunde soll nun das Rohr unter Innendruck durchgerechnet werden, das sich mit der strengen Theorie ebenfalls noch bewältigen läßt.

b) Das gezogene Rohr unter Innendruck.

Macht man den Ansatz

$$u = F(r), \quad \varepsilon_z = K_0 \quad (61)$$

und geht damit in (53) ein, so erhält man die Differentialgleichung

$$1 - \frac{du}{dr} = \frac{\sqrt{2\kappa + 1}}{1 - \frac{u}{r}}, \quad (62)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$\kappa = \frac{K_0}{1 - 2K_0}.$$

Die physikalisch mögliche Lösung von (62) ist

$$u = r - \sqrt{\sqrt{2\kappa + 1} r^2 - c}. \quad (63)$$

Geht man mit (63) in (2) ein, so wird

$$\bar{r} = \sqrt{\sqrt{2\kappa + 1} r^2 - c}, \quad (64)$$

$$r = \frac{\sqrt{r^2 + c}}{(2\kappa + 1)^{1/4}}, \quad (65)$$

$$u = \frac{\sqrt{r^2 + c}}{(2\kappa + 1)^{1/4}} - \bar{r}. \quad (66)$$

Die Dehnungen sind damit

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= -\frac{1}{2} \frac{(2\kappa + 1 - \sqrt{2\kappa + 1}) r^2 + c}{\sqrt{2\kappa + 1} r^2 - c}, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{2\kappa + 1} + \frac{c}{r^2} \right), \\ \varepsilon_z &= K_0. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Mit $K_0 = 0$ und $c \ll r^2$ erhält man aus (67) die bekannten Dehnungen aus der Elastizitätstheorie

$$\varepsilon_r = -\frac{c}{2r^2}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{c}{2r^2}, \quad \varepsilon_z = 0.$$

Die Spannungen werden damit

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r' &= -\frac{1}{2} \frac{[(2\kappa + 1) - \sqrt{2\kappa + 1}] r^2 + c}{\sqrt{2\kappa + 1} r^2 - c} g(\sqrt{2} \sqrt{K}), \\ \sigma_\varphi' &= \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{2\kappa + 1} + \frac{c}{r^2} \right) g(\sqrt{2} \sqrt{K}), \\ \sigma_z' &= K_0 g(\sqrt{2} \sqrt{K}). \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Die Gl. (68) erfüllen die Gleichgewichtsbedingung (18). Der hydrostatische Spannungszustand wird

$$\sigma_0 = -\sigma_r' - \int_{r_a}^r \frac{\sigma_r' - \sigma_\varphi'}{r} dr + c_1 \equiv C(r). \quad (69)$$

Mit (68) und (69) erhält man die effektiven Spannungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\int_{r_a}^r \frac{\sigma_r' - \sigma_\varphi'}{r} dr + c_1, \\ \sigma_\varphi &= \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{2\kappa + 1} + \frac{c}{r^2} \right) g(\sqrt{2} \sqrt{K}) + C(r), \\ \sigma_z &= K_0 g(\sqrt{2} \sqrt{K}) + C(r), \\ \tau &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Wird in (70) $K_0 = 0$ und $c_1 = 0$ gesetzt, so erhält man den Spannungszustand für das dickwandige Rohr unter Innendruck. Mit $K_0 = 0$ ergibt sich das dickwandige gezogene Rohr.

IX. Ermittlung der Verfestigungsfunktion.

Wird ein dünnwandiges Rohr durch einen Innendruck und einen Längszug beansprucht, so läßt sich daraus die Verfestigungsfunktion bestimmen, wenn an der Außenwandung des Rohres die Dehnungen gemessen werden.

Mit der Randbedingung $\sigma_r = 0$ für $r = r_a$ geht (70) über in

$$\sigma_r = \frac{1}{2} \int_{r_a}^r \left(\frac{\bar{\mu}(\bar{\mu}-1)r^2+c}{\bar{\mu}r^2-c} + (1-\bar{\mu}) + \frac{c}{r^2} \right) g(\sqrt{2}\sqrt{K}) dr, \quad (71)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mu}(\bar{\mu}-1)r^2+c}{\bar{\mu}r^2-c} + (1-\bar{\mu}) + \frac{c}{r^2} \right) g(\sqrt{2}\sqrt{K}) + \sigma_r, \quad (72)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2} \left(2K_0 + \frac{\bar{\mu}(\bar{\mu}-1)r^2+c}{\bar{\mu}r^2-c} \right) g(\sqrt{2}\sqrt{K}) + \sigma_r. \quad (73)$$

Zur Abkürzung wurde in (71), (72) und (73) gesetzt

$$\bar{\mu} = \sqrt{1 - \frac{2K_0}{2K_0-1}}.$$

Da die Versuche an einem dünnwandigen Rohr ausgeführt werden, so ist in erster Annäherung

$$\sqrt{2}\sqrt{K} = \sqrt{(\varepsilon_{r_a} - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_{\varphi_a} - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_{z_a} - \varepsilon_0)^2} \quad (74)$$

mit

$$\varepsilon_{i_a} \equiv \varepsilon_i \quad \text{für} \quad r = r_a.$$

Geht man mit (74) in (71) bis (73) ein, so erhält man, da $g(\sqrt{2}\sqrt{K})$ als eine von r und z unabhängige Funktion angenommen werden kann, die mit $\bar{g}(\sqrt{2}\sqrt{K})$ bezeichnet wird.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{g(\sqrt{2}\sqrt{K})}{2} \int_{r_a}^r \left(\frac{\bar{\mu}(\bar{\mu}-1)r^2+c}{\bar{\mu}r^2-c} + (1-\bar{\mu}) + \frac{c}{r^2} \right) \frac{dr}{r}, \\ \sigma_\varphi &= \frac{\bar{g}(\sqrt{2}\sqrt{K})}{2} \left(\frac{\bar{\mu}(\bar{\mu}-1)r^2+c}{\bar{\mu}r^2-c} + (1-\bar{\mu}) + \frac{c}{r^2} \right) + \sigma_r, \\ \sigma_z &= \frac{\bar{g}(\sqrt{2}\sqrt{K})}{2} \left(2K_0 + \frac{\bar{\mu}(\bar{\mu}-1)r^2+c}{\bar{\mu}r^2-c} \right) + \sigma_r. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Die Konstanten c und K_0 lassen sich aus den Bedingungen

$$\varepsilon_{z_a} = K_0 \approx \frac{\Delta L}{L} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2, \quad (76)$$

$$\varepsilon_{r_a} = -\frac{1}{2} \frac{\bar{\mu}(\bar{\mu}-1)r_a^2+c}{\bar{\mu}r_a^2-c}, \quad (77)$$

bestimmen.

Setzt man die Verfestigungsfunktion in Form einer Potenzreihe an, so ist

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}\sqrt{K}) &= \beta \sqrt{2}\sqrt{K} + 2\vartheta K + \dots, \\ g(\sqrt{2}\sqrt{K}) &= \beta + \vartheta \sqrt{2}\sqrt{K} + \dots \end{aligned}$$

Bei den Versuchen hält man den Innendruck p_i konstant und ändert den Axialzug. Aus (75) erhält man die Gleichung für den Axialzug

$$P_A = \pi \cdot \bar{g}(\sqrt{2}\sqrt{K}) \int_{r_i}^{r_a} \left[2K_0 + \frac{\bar{\mu}(\bar{\mu}-1)r_a^2+c}{\bar{\mu}r_a^2-c} + \frac{2\sigma_r}{\bar{g}(\sqrt{2}\sqrt{K})} \right] r dr. \quad (78)$$

Mißt man bei den Axialbelastungen P_0, P_1, \dots, P_i jeweils die dazugehörigen Dehnungen, so ist durch (78) ein lineares Gleichungssystem gegeben, aus dem die Konstanten β, ϑ, \dots ermittelt werden können.

(Eingegangen am 4. November 1952.)

Berechnung von Translationsschalen.

Von W. Zerna, Hannover.

Mit 3 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Alle für die Berechnung des Membranspannungszustandes, des Formänderungszustandes und der Randstörungen von Translationsschalen erforderlichen Gleichungen werden aufgestellt. Die Membrantheorie wird auf eine Differentialgleichung für eine Längskraft, der Formänderungszustand sowie das Randstörungenproblem auf Differentialgleichungen für die Normalverschiebungen zurückgeführt.

Summary. The report contains all equations which are required for calculating the membran state of stress, the deformation state, and the edge effect of translation shells. The membran theory is reduced to a differential equation for a stress resultant, whereas the deformation state, and the edge effect are reduced to differential equations for the normal displacements.

Résumé. Le rapport contient toutes les équations pour le calcul de l'état de tension du diaphragme, de l'état de déformation, et des dérangements marginaux d'enveloppes de translation. La théorie de diaphragme est réduite à une équation différentielle pour une force longitudinale, tandis que l'état de déformation et le problème des dérangements marginaux sont réduits à des équations différentielles pour les déplacements normaux.

1. Einleitung.

Wird längs einer ebenen Kurve eine zweite ebene Kurve, deren Ebene senkrecht zur Ebene der ersten Kurve steht, parallel zu ihrer Ausgangslage verschoben, so entsteht eine Translations- oder Rückungsfläche. Eine Schale, deren Mittelfläche nach einer solchen Fläche geformt ist, bildet eine Kuppel über rechteckigem Grundriß und heißt Translationsschale¹. Derartige Schalen stellen für die Überdachung weitgespannter Räume, wie Hallen u. dgl., äußerst zweckmäßige Konstruktionen dar. Ihrer praktischen Anwendung stand bisher jedoch entgegen, daß kein hinreichend brauchbares Rechenverfahren verfügbar war, insbesondere für die Untersuchung des Formänderungszustandes und der Randstörungen, worauf bei allen nicht ganz einfach gelagerten Fällen nicht verzichtet werden kann. Lediglich der Membranspannungszustand ist bisher behandelt worden, wobei für die numerische Lösung die Differenzenrechnung zur Anwendung gelangt, was bei derartigen Problemen wohl der zweckmäßigste Weg zu sein scheint. In der Literatur sind bisher zwei Verfahren zur Bestimmung der Membranspannungen angegeben. Das eine Verfahren² führt auf eine Differentialgleichung für die Schubkräfte, das andere Verfahren³ auf eine Differentialgleichung für eine Spannungsfunktion. Beide Methoden sind für die Berechnung mittels Differenzenrechnung nicht sehr geeignet, da im ersten Fall eine gesonderte Berechnung der Randwerte notwendig ist und im zweiten Fall die gesuchten Größen als zweite Differentialquotienten der Spannungsfunktion zu bestimmen sind, was umständlich ist und Ungenauigkeiten in sich birgt, wie überhaupt die Einführung einer Spannungsfunktion, die selbst ja gar nicht interessiert, einen Umweg bedeutet.

Translationsschalen stellen nun aber einen Sonderfall einer allgemeinen Flächenklasse dar, die von Zerna⁴ behandelt worden ist. Das Problem der Bestimmung des Membranspannungszustandes läßt sich danach auf eine Differentialgleichung für eine Funktion zurückführen, die, abgesehen von einem Faktor, eine Längskraft darstellt,

¹ Der Vorschlag, Schalen nach Translationsflächen zu bilden, stammt von F. Dischinger, vgl. F. Dischinger und U. Finsterwalder: Bau-Ing. 9, 807 (1928).

² W. Flügge: Statik und Dynamik der Schalen, S. 91. Berlin. 1934.

³ A. Pucher: Bau-Ing. 18, 118 (1938).

⁴ W. Zerna: Ingenieur-Arch. 19, 228 (1951).

was für das praktische Rechnen nach dem Differenzenverfahren oder auch anderer numerischer Lösungsmethoden von beträchtlichem Vorteil ist.

Die vorliegende Arbeit behandelt die vollständige Berechnung der Translationschalen, und zwar wird der Membranspannungszustand nach dem erwähnten Verfahren von Zerna behandelt, der Formänderungszustand untersucht und die Randstörungen berechnet.⁵

2. Geometrische Beziehungen.

Bezeichnen x und ξ zwei Parameter, so läßt sich der Ortsvektor r eines Punktes der Mittelfläche einer Translationsschale durch

$$r = a(x) + f(\xi) \quad (1)$$

ausdrücken. Darin ist a der Ortsvektor der Erzeugenden K und f der Ortsvektor der Querschnittskurve C (Abb. 1). In einem rechtwinkligen rechtshändigen Koordinatensystem, dessen Achsen durch die Einheitsvektoren i_1, i_2, i_3 festgelegt sind (Abb. 1), können a und f durch

$$\left. \begin{aligned} a &= L \vartheta i_1 + y(\vartheta) i_2, \\ f &= l \varphi i_3 + \eta(\varphi) i_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

dargestellt werden, wenn

$$\vartheta = \frac{x}{L}, \quad \varphi = \frac{\xi}{l} \quad (3)$$

dimensionslose Koordinaten bezeichnen mit L und l als Grundrißabmessungen der Schale. Ableitungen nach ϑ werden durch Striche, nach φ durch Punkte angezeigt.

Die Basisvektoren der Fläche folgen aus (1) und (2) zu

$$\left. \begin{aligned} e_1 = r' &= L i_1 + y' i_2, \\ e_2 = r^* &= l i_3 + \eta^* i_2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Abb. 1. Mittelfläche einer Translationsschale.

Weiterhin folgt daraus

$$e_1' = y'' i_2, \quad e_1^* = e_2' = 0, \quad e_2^* = \eta^{**} i_2. \quad (5)$$

Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform (Komponenten des Maßtensors) errechnen sich aus (4) zu

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= e_1 \cdot e_1 = L^2 + y'^2, \\ g_{12} &= g_{21} = e_1 \cdot e_2 = \eta^* y', \\ g_{22} &= e_2 \cdot e_2 = l^2 + \eta^{*2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Die Determinante des Maßtensors ergibt sich damit zu

$$g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = (L l)^2 + l^2 y'^2 + L^2 \eta^{*2}. \quad (7)$$

Die kontravarianten Maßzahlen des Maßtensors lassen sich mit Hilfe von (6) und (7) aus

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g} \quad (8)$$

bestimmen. Der Normalvektor e_3 der Mittelfläche errechnet sich zu

$$\sqrt{g} e_3 = e_1 \times e_2 = l y' i_1 - L l i_2 + L \eta^* i_3. \quad (9)$$

⁵ Für die Überprüfung aller Ableitungen und Formeln ist der Verfasser Herrn Dipl.-Ing. Goswin Mittelmann zu Dank verpflichtet.

Die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform der Fläche ergeben sich zu

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= e_3 \cdot e_1' = -\frac{L l y''}{\sqrt{g}}, \\ b_{12} &= b_{21} = e_3 \cdot e_1^* = 0, \\ b_{22} &= e_3 \cdot e_2^* = -\frac{L l \eta''}{\sqrt{g}}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Aus $b_{12} = 0$ ist zu erkennen, daß das gewählte Koordinatennetz konjugiert ist, wegen $g_{12} \neq 0$ stellt es aber nicht das Netz der Krümmungslinien dar. Aus (10) folgt mittels (6)

$$\left. \begin{aligned} b_1^1 &= g^{11} b_{11} = -\frac{L l y'' (l^2 + \eta^2)}{g^{3/2}}, \\ b_2^1 &= g^{12} b_{22} = \frac{L l \eta'' \eta' y'}{g^{3/2}}, \\ b_1^2 &= g^{12} b_{11} = \frac{L l y'' y' \eta'}{g^{3/2}}, \\ b_2^2 &= g^{22} b_{22} = -\frac{L l \eta'' (l^2 + y^{12})}{g^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

3. Membranspannungszustand⁶.

Die Längskräfte mögen mit N_θ und N_φ , die Schubkräfte mit T bezeichnet werden, ihr positiver Wirkungssinn ist aus Abb. 2 ersichtlich. Die Belastung der Schale sei durch den Belastungsvektor p in der Form

$$p = p_\theta i_1 + p_\varphi i + p \mathfrak{k} \quad (12)$$

gegeben, worin $i = \mathfrak{k} = l i_3 + \eta i_2$ und p_θ , p_φ , p in Richtung der Koordinatenachse i_1 , der Tangente und Normale an die Querschnittskurve verlaufen.

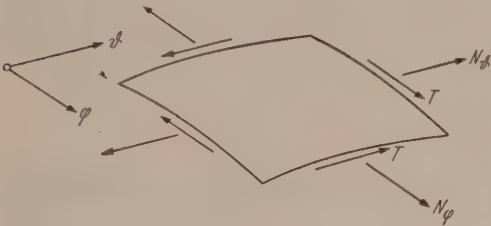


Abb. 2. Längs- und Schubkräfte.

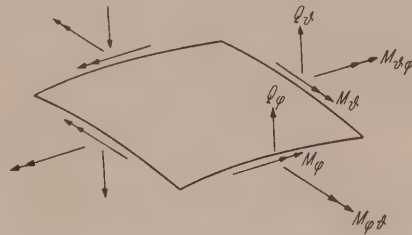


Abb. 3. Biege- und Drillingsmomente, Querkkräfte. (Der Drehsinn der Doppelpfeile entspricht Rechtsschrauben.)

Es werden reduzierte Längskräfte und Belastungskomponenten eingeführt, indem gesetzt wird

$$\bar{N}_\theta = \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} N_\theta, \quad \bar{N}_\varphi = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} N_\varphi, \quad (13)$$

$$\bar{p}_\theta = \sqrt{g} p_\theta, \quad \bar{p}_\varphi = \sqrt{g} p_\varphi, \quad \bar{p} = \sqrt{g} p. \quad (14)$$

Mit Verwendung der definierten reduzierten Größen lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen der Membrantheorie in der Form darstellen:

$$\bar{N}_\theta' + T' + \frac{\bar{p}_\theta}{L} = 0, \quad (15)$$

⁶ Die Berechnung des Membranspannungszustandes erfolgt nach W. Zerna: Ingenieur-Arch. 19, 228 (1951).

$$\begin{aligned} T' + \bar{N}_\varphi \cdot + \frac{\varphi \eta''}{\varphi \eta' - \eta} \bar{N}_\varphi + \frac{\varphi y''}{\varphi \eta' - \eta} \bar{N}_\vartheta + \bar{p}_\varphi - \frac{\varphi y'}{\varphi \eta' - \eta} \frac{\bar{p}_\vartheta}{L} &= 0, \\ \bar{N}_\varphi + \frac{y''}{\eta''} \bar{N}_\vartheta - \frac{\varphi \eta' - \eta}{\eta''} \bar{p} - \frac{y'}{\eta''} \frac{\bar{p}_\vartheta}{L} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Diese drei Gleichungen lassen sich auf eine einzige Differentialgleichung für \bar{N}_ϑ zurückführen, diese lautet:

$$\bar{N}_\vartheta'' + \frac{y''}{\eta''} \bar{N}_\vartheta - 2 \frac{y'' \eta''}{\eta''^2} \bar{N}_\vartheta - \frac{y''}{\eta''} \left[\frac{\eta''''}{\eta''} - 2 \left(\frac{\eta'''}{\eta''} \right)^2 \right] \bar{N}_\vartheta = \bar{q}, \quad (17)$$

worin

$$\bar{q} = - \left\{ P_2'' - P_1' + \frac{\varphi \eta''}{\varphi \eta' - \eta} P_2' + \left(\frac{\varphi \eta''}{\varphi \eta' - \eta} \right)' P_2 + \frac{\bar{p}_\vartheta'}{L} \right\}, \quad (18)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \bar{p}_\varphi - \frac{\varphi y'}{(\varphi \eta' - \eta)} \frac{\bar{p}_\vartheta}{L}, \\ P_2 &= - \frac{\varphi \eta' - \eta}{\eta''} \bar{p} - \frac{y'}{\eta''} \frac{\bar{p}_\vartheta}{L}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Einführung von

$$\Phi = \frac{1}{\eta''} \bar{N}_\vartheta \quad (20)$$

und

$$q = \frac{1}{\eta''} \bar{q} \quad (21)$$

bringt (17) in die Form

$$\Phi'' + \frac{\eta'''}{\eta''} \Phi' = q, \quad (22)$$

womit die den Membranzustand der Translationsschale beschreibende Differentialgleichung gefunden ist. Sind am Rande der Schale die Längskräfte N_ϑ bzw. \bar{N}_φ vorgeschrieben, wie dies fast stets der Fall ist, so sind bei Beachtung von (20) und (16) auch sofort die Randwerte der Funktion Φ bekannt. Damit läßt sich dann (22) mit Hilfe der Differenzenrechnung oder einem anderen Näherungsverfahren ohne Schwierigkeit lösen. Ist Φ gefunden, so folgt \bar{N}_ϑ aus (20), \bar{N}_φ aus (16) und T aus (15).

4. Formänderungszustand.

Der Verschiebungsvektor v eines Punktes der Mittelfläche werde in der Form

$$v = v i_1 + u i_3 + w e_3 \quad (23)$$

angesetzt, worin also v , u , w seine Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen i_1 , i_3 und der Flächennormalen sind. Die Ableitungen von v nach ϑ und φ ergeben sich zu

$$\left. \begin{aligned} v' &= v' i_1 + u' i_3 + w' e_3 + w e_3', \\ v'' &= v'' i_1 + u'' i_3 + w'' e_3 + w e_3''. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Die Verzerrungskomponenten der Mittelfläche errechnen sich aus⁷

$$\alpha_{11} = e_1 \cdot v', \quad \alpha_{22} = e_2 \cdot v'', \quad 2 \alpha_{12} = e_1 \cdot v'' + e_2 \cdot v'. \quad (25)$$

Werden nun die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} e_1 \cdot e_3' &= -b_{11}, & e_2 \cdot e_3' &= -b_{22}, \\ e_1 \cdot e_3'' &= -e_2 \cdot e_3' = -b_{12} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

⁷ Vgl. W. Zerna: Ingenieur-Arch. 17, 149 (1949).

berücksichtigt, so folgt aus (25) mit (24)

$$\alpha_{11} = L v' - w b_{11}, \quad \alpha_{22} = l u' - w b_{22}, \quad 2 \alpha_{12} = L v' + l u'. \quad (27)$$

Werden aus den Gl. (27) u und v eliminiert, so ergibt sich

$$w'' b_{11} + w'' b_{22} + 2 w' b_{11}' + 2 w' b_{22}' + w b_{11}'' + w b_{22}'' + A = 0, \quad (28)$$

worin

$$A = \alpha_{11}'' + \alpha_{22}'' - 2 \alpha_{12}''. \quad (29)$$

Der Ausdruck (28) ist eine Differentialgleichung zur Bestimmung der Normalverschiebung w .

Das Elastizitätsgesetz, das den Zusammenhang zwischen den Schnittkräften und den Verzerrungen vermittelt, lautet⁸:

$$\left. \begin{aligned} E t \alpha_{11} &= H_{1111} \bar{N}_\varphi + 2 H_{1112} T + H_{1122} \bar{N}_\varphi, \\ E t \alpha_{22} &= H_{2211} \bar{N}_\varphi + 2 H_{2212} T + H_{2222} \bar{N}_\varphi, \\ E t \alpha_{12} &= H_{1211} \bar{N}_\varphi + 2 H_{1212} T + H_{1222} \bar{N}_\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Darin bedeutet E den Elastizitätsmodul, t die Schalendicke und

$$\begin{aligned} H_{1111} &= \frac{(g_{11})^2}{\sqrt{g}} = \frac{(L^2 + y'^2)^2}{\sqrt{(Ll)^2 + l^2 y'^2 + L^2 \eta'^2}}, \\ H_{1112} &= H_{1211} = \frac{g_{11} g_{21}}{\sqrt{g}} = \frac{\eta' y' (L^2 + y'^2)}{\sqrt{(Ll)^2 + l^2 y'^2 + L^2 \eta'^2}}, \\ H_{1122} &= H_{2211} = \frac{g_{12}^2 - \mu g}{\sqrt{g}} = \frac{(\eta' y')^2 - \mu [(Ll)^2 + l^2 y'^2 + L^2 \eta'^2]}{\sqrt{(Ll)^2 + l^2 y'^2 + L^2 \eta'^2}}, \\ H_{2212} &= H_{1222} = \frac{g_{12} g_{22}}{\sqrt{g}} = \frac{\eta' y' (l^2 + \eta'^2)}{\sqrt{(Ll)^2 + l^2 y'^2 + L^2 \eta'^2}}, \\ H_{2222} &= \frac{(g_{22})^2}{\sqrt{g}} = \frac{(l^2 + \eta'^2)^2}{\sqrt{(Ll)^2 + l^2 y'^2 + L^2 \eta'^2}}, \\ H_{1212} &= \frac{g_{12}^2 + g_{11} g_{22} + \mu g}{2 \sqrt{g}} = \frac{(\eta' y')^2 + (L^2 + y'^2) (l^2 + \eta'^2) + \mu [(Ll)^2 + l^2 y'^2 + L^2 \eta'^2]}{2 \sqrt{(Ll)^2 + l^2 y'^2 + L^2 \eta'^2}}, \end{aligned}$$

worin (6) und (7) benutzt und mit μ die Querkonstruktionsziffer bezeichnet ist.

Sind die Schnittgrößen des Membranspannungszustandes ermittelt, so folgen aus (30) die Verzerrungskomponenten und damit läßt sich dann aus (28) die Normalverschiebung w bestimmen. Aus (27) lassen sich damit weiterhin die Verschiebungen u und v errechnen. Die Randbedingungen für w , die zur Lösung der Differentialgleichung (28) benötigt werden, folgen ebenfalls aus (27), es gilt nämlich für die Ränder $\varphi = \varphi_0$ und $\vartheta = \vartheta_0$

$$\left. \begin{aligned} w(\varphi_0) &= - \left(\frac{\alpha_{11} - L v'}{b_{11}} \right)_{\varphi=\varphi_0}, \\ w(\vartheta_0) &= - \left(\frac{\alpha_{22} - l u'}{b_{22}} \right)_{\vartheta=\vartheta_0} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

worin α_{11} , α_{22} gemäß (30) bekannt sind, b_{11} und b_{22} bestimmen sich aus (10) und $v'(\varphi_0)$ sowie $u'(\vartheta_0)$ können beliebig vorgeschrieben werden, was damit zusammenhängt,

⁸ Vgl. W. Zerna: Ingenieur-Arch. **17**, 149 (1949). — A. E. Green und W. Zerna: Quart. J. Mech. appl. Math. **3**, 9 (1950); Theoretical Elasticity. Oxford (im Druck).

daß jede Fläche, die keine Eifläche ist, dehnungslose Verbiegungen erfahren kann, also solche Verbiegungen, die keine Verzerrungen der Mittelfläche hervorrufen und damit den Membranspannungszustand nicht beeinflussen.

5. Randstörungen.

Mit Hilfe der Membrantheorie lassen sich längs der Ränder der Translationsschale im allgemeinen nicht alle gewünschten Randbedingungen erfüllen, so daß die längs ihrer Ränder beanspruchte, im übrigen aber unbelastete Schale untersucht werden muß. Bei Schalen mit positivem Gaußschem Krümmungsmaß, das der hier betrachteten Translationsschale zugrunde gelegt werde, ergibt sich nun, daß infolge der Beanspruchungen an den Rändern ein Spannungszustand entsteht, der von den Rändern ausgehend sehr schnell abklingt und als Randstörung bezeichnet wird.

Es werde ein Rand $\varphi = \varphi_0 = \text{const.}$ betrachtet. Die Randstörungen, die von diesem Rand ausgehen, sind dadurch gekennzeichnet, daß die Größenordnung aller Funktionen, die diese Störung beschreiben, durch Differentiation nach φ zunimmt, durch Differentiation nach ϑ jedoch unverändert bleibt. Es können daher näherungsweise alle Funktionen außer denen mit den höchsten Ableitungen nach φ vernachlässigt werden. Hinsichtlich eines Randes $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const.}$ gilt Entsprechendes.

Mit diesen Voraussetzungen läßt sich das Problem der Randstörung für den Rand $\varphi = \varphi_0 = \text{const.}$ näherungsweise auf zwei Differentialgleichungen zurückführen, die mit den eingeführten Bezeichnungen die Form haben⁹:

$$\left. \begin{aligned} (g^{22})^2 \Psi'' + \frac{E t b_{11}}{g} w &= 0, \\ (g^{22})^2 w'' - \frac{12(1-\mu^2)b_{11}}{g E t^3} \Psi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Darin ist

$$\Psi'' = \sqrt{g} \bar{N}_\vartheta, \quad \Psi'' = \sqrt{g} \bar{N}_\varphi, \quad \Psi' = -\sqrt{g} T. \quad (33)$$

Für einen Rand $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const.}$ gilt entsprechend

$$\left. \begin{aligned} (g^{11})^2 \bar{\Psi}'' + \frac{E t b_{22}}{g} \bar{w} &= 0, \\ (g^{11})^2 \bar{w}'' - \frac{12(1-\mu^2)b_{22}}{g E t^3} \bar{\Psi} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

mit

$$\bar{\Psi}'' = \sqrt{g} \bar{N}_\varphi, \quad \bar{\Psi}'' = \sqrt{g} \bar{N}_\vartheta, \quad \bar{\Psi}' = -\sqrt{g} T. \quad (35)$$

Die Normalverschiebung ist jetzt mit \bar{w} bezeichnet, um sie von der mit (32) beschriebenen Randstörung zu unterscheiden.

Die Differentialgleichungen (32) bzw. (34) lassen sich auf eine einzige zurückführen, es ergibt sich für die Randstörung am Rand $\varphi = \varphi_0 = \text{const.}$

$$w'''' + 4 k_\varphi^4 w = 0 \quad (36)$$

und für die Randstörung am Rand $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const.}$

$$\bar{w}'''' + 4 k_\vartheta^4 \bar{w} = 0. \quad (37)$$

Darin ist

$$k_\varphi = \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{t g^{22}}} \sqrt{\frac{b_1^1}{g_{22}}}, \quad (38)$$

⁹ Vgl. W. Zerna: Z. angew. Math. Mechan. **30**, 370 (1950).

$$k_{\vartheta} = \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{i}g^{11}} \sqrt{\frac{b_2^2}{g_{11}}}. \quad (39)$$

Ist w bzw. \bar{w} aus (36) bzw. (37) bestimmt, so berechnet sich die Funktion Ψ bzw. $\bar{\Psi}$ aus (32) bzw. (34) und damit sind dann auch gemäß (33) bzw. (35) die Längskräfte und die Schubkräfte bekannt.

Die Biegemomente M_{φ} , M_{ϑ} , die Drillungsmomente $M_{\varphi\vartheta}$, $M_{\vartheta\varphi}$ und die Querkkräfte Q_{φ} , Q_{ϑ} sind mit ihrem positiven Wirkungssinn in Abb. 3 dargestellt, sie errechnen sich im Rahmen der eingeführten Näherung aus

$$\left. \begin{aligned} M_{\varphi} &= B w'' g^{22}, \\ M_{\vartheta\varphi} &= -B w'' (1-\mu), \\ Q_{\varphi} &= -B w''' g^{22} \sqrt{g^{22}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{für die Randstörung am Rand} \\ &\varphi = \varphi_0 = \text{const.} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{\vartheta} &= -B \bar{w}'' g^{11}, \\ M_{\varphi\vartheta} &= -B \bar{w}'' g^{12} \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} (1-\mu), \\ Q_{\vartheta} &= -B \bar{w}''' g^{11} \sqrt{g^{11}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{für die Randstörung am Rand} \\ &\vartheta = \vartheta_0 = \text{const.} \end{aligned} \quad (41)$$

In (40) und (41) bedeutet

$$B = \frac{E t^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Da nur die höchsten Ableitungen aller auftretenden Funktionen bei der Untersuchung der Randstörung beibehalten worden sind, lassen sich im Sinne dieser Näherung nur Randbedingungen für die Normalverschiebungen und deren Ableitungen erfüllen und die Erfüllung dieser Randbedingungen beeinflusst bis zur Ordnung der angewandten Näherung nicht solche Randbedingungen, die bereits durch die Membrantheorie erfüllt worden sind.

Abschließend sei noch kurz die Lösung der Differentialgleichung (36) für den Sonderfall $k_{\varphi} = \text{const.}$ betrachtet, der sich durch entsprechende Veränderlichkeit der Schalenstärke praktisch fast immer verwirklichen läßt. Die Differentialgleichung hat in obigem Falle die allgemeine Lösung

$$w = e^{-k_{\varphi}\bar{\varphi}} (C_1 \cos k_{\varphi} \bar{\varphi} + C_2 \sin k_{\varphi} \bar{\varphi}) + e^{k_{\varphi}\bar{\varphi}} (C_3 \cos k_{\varphi} \bar{\varphi} + C_4 \sin k_{\varphi} \bar{\varphi}).$$

Darin zählt die Koordinate $\bar{\varphi}$ vom Rand aus und C_1 bis C_4 sind beliebige Funktionen von ϑ . Die Voraussetzung des schnellen Abklingens von w erfordert, daß $C_3 = C_4 = 0$ gesetzt wird, so daß die Lösung lautet:

$$w = e^{-k_{\varphi}\bar{\varphi}} (C_1 \cos k_{\varphi} \bar{\varphi} + C_2 \sin k_{\varphi} \bar{\varphi}). \quad (42)$$

Wie daraus zu erkennen ist, ändert w tatsächlich beim Differenzieren nach φ seine Größenordnung mit dem Faktor k_{φ} , der groß ist, sofern die Schale nicht sehr flach ist. Flache Translationsschalen müssen daher nach einer besonderen Theorie behandelt werden¹⁰.

¹⁰ Eine allgemeine Theorie flacher Schalen (shallow shells) findet sich in Green-Zerna: Theoretical Elasticity. Oxford (im Druck).

(Eingegangen am 28. November 1952.)

Querschwingungen von Trägern mit Feder und Zusatzmasse.

Von Hans Egger, Graz.

Mit 11 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Berechnung der Eigenschwingungen und erzwungenen Schwingungen eines zusammengesetzten Systems, bestehend aus einem beliebig gelagerten Träger (konstanter Querschnitt, Masse m) und einer an einem Punkte des Trägers federnd aufgehängten Zusatzmasse M .

Numerische Ermittlung der Eigenschwingzahlen für den Fall des Kragträgers (Masse M am Ende des Trägers) und für den beidseitig frei aufliegenden Träger (Masse M in Trägermitte). Näherungslösungen für die Grundschwingzahl.

Summary. Calculation of the natural vibrations and the vibrations caused by external forces of a composite system, consisting of a beam supported ad libitum (constant cross-section, mass m) and an additional mass M elastically suspended from a point of the beam.

Numerical ascertainment of the natural vibration values for the special case of the cantilever (beam fixed at one end only) (mass M at the end of the beam) and for the beam freely supported at both ends (mass M in the middle of the beam). Approximative solutions for the basic vibration value.

Résumé. Calcul des vibrations naturelles et des vibrations causées par des forces extérieures d'un système composé d'une poutre à appuis quelconques (section transversale constante, masse m) et une masse M additionnelle suspendue élastiquement d'un point de la poutre.

Constataion numérique des valeurs de la vibration naturelle dans le cas d'une poutre en porte-à-faux (poutre encastrée seulement à une extrémité) (masse M au bout de la poutre) et dans le cas d'une poutre appuyée librement aux deux bouts (masse M au milieu de la poutre). Solutions approximatives pour la valeur de la vibration de base.

Einführung.

Im folgenden werden die Eigenschwingungen und erzwungenen Schwingungen eines zusammengesetzten Systems, bestehend aus irgendwie gelagerten Trägern mit konstantem Querschnitt und einer konzentrierten Masse M , die an einem Punkt des Trägers an einer Feder F befestigt ist, untersucht. An einer Stelle des Trägers wirke außerdem eine erregende Kraft P von periodisch wechselnder Größe (Abb. 1).

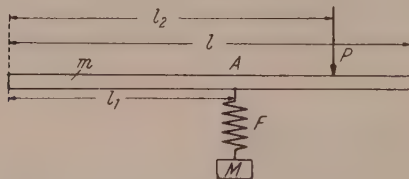


Abb. 1.

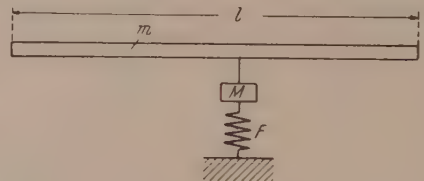


Abb. 2.

Diese Untersuchung mag von Wert sein für die Fälle federnder Lagerung von Maschinen auf Trägern, Gerüsten, Fundamenten u. dgl. und für die dynamische Dämpfung von erzwungenen Schwingungen.

Dana Young¹ untersuchte die Eigenschwingungen und gedämpften Schwingungen von zusammengesetzten Systemen, die im Gegensatz zu dem hier betrachteten Fall Masse und Feder vertauscht haben (Abb. 2).

Zur Herleitung der exakten Schwingungsgleichungen trennt Young Träger und Masse und macht für die im Punkte A übertragene Kraft P den Ansatz $P = P_0 \sin \omega t$ mit ω als unbekannter Kreisfrequenz der Eigenschwingungen des zusammengesetzten Systems. Der weitere Verlauf der Rechnung verläuft analog zu einem von Courant-

¹ Dana Young: J. appl. Mech. 15, 65 (1948).

Hilbert² angegebenen Rechnungsgang für die erzwungenen Schwingungen eines Systems von unendlich vielen Freiheitsgraden.

Im hier behandelten Falle wird von dieser Methode kein Gebrauch gemacht, sondern mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen aus den Ausdrücken für die kinetische und potentielle Energie des zusammengesetzten Systems die Differentialgleichungen für die Bewegung gefunden, ein Weg, wie er von S. Timoshenko³ bei der Untersuchung der erzwungenen Schwingungen von Trägern eingeschlagen wurde.

Aufstellung der Bewegungsgleichungen für die Eigenschwingungen.

Bekanntlich gilt für die Eigenschwingungen eines Trägers von konstantem Querschnitte F , der Länge l und der Masse m unter den üblichen Voraussetzungen (Vernachlässigung von Rotationsträgheit und Einfluß der Schubkräfte) die Differentialgleichung

$$EJ \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \frac{m}{l} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0,$$

worin $y(x, t)$ die Auslenkung an der Stelle x zur Zeit t ist. Mit $\mu_1 = \mu F = \frac{m}{l}$ als Masse pro Längeneinheit gilt weiters für die Eigenfunktionen $z_k(x)$

$$\frac{d^4 z_k(x)}{dx^4} - \frac{\mu_1 \omega_k^2}{EJ} z_k(x) = 0.$$

Die ω_k sind die Kreisfrequenzen der Eigenschwingungen. Im weiteren werden die Eigenfunktionen als normiert angenommen, so daß gilt

$$\int_{x=0}^l \mu_1 z_v(x) z_\mu(x) dx = 0 \quad (v \neq \mu), \quad (1a)$$

$$\int_{x=0}^l \mu_1 z_v^2(x) dx = 1. \quad (1b)$$

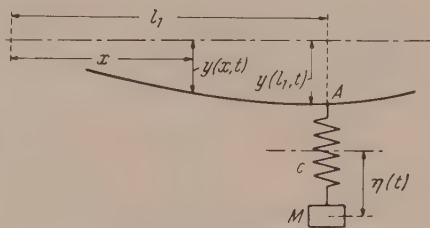


Abb. 3.

Im Punkte $x = l_1$ des Trägers sei eine masselos gedachte Feder mit der Federzahl $c \left[\frac{K}{L} \right]$ befestigt, an der eine konzentrierte Masse M hängt. Die Auslenkung eines Punktes der Trägermittellinie von der statischen Ruhelage werde mit $y(x, t)$ und die Vertikalverschiebung der Masse M aus der Gleichgewichtslage mit $\eta(t)$ bezeichnet (Abb. 3).

Der Ausdruck für die potentielle Energie V des Gesamtsystems lautet dann:

$$V = \frac{EJ}{2} \int_{x=0}^l \left[\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx + \frac{1}{2} c [\eta(t) - y(l_1, t)]^2. \quad (a)$$

Für die kinetische Energie T gilt

$$T = \frac{\mu_1}{2} \int_{x=0}^l \left[\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx + \frac{1}{2} M \left(\frac{d\eta(t)}{dt} \right)^2. \quad (b)$$

Als allgemeiner Ausdruck für $y(x, t)$ bei den Querschwingungen des Trägers werde eine unendliche Reihe von der Form

$$y(x, t) = \sum_{v=1}^{\infty} z_v(x) p_v(t) \quad (2)$$

² Courant-Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik, Bd. I, S. 240. Berlin: Springer-Verlag, 1924.

³ S. Timoshenko: Schwingungsprobleme der Technik, S. 225ff. Berlin: Springer-Verlag, 1932.

angesetzt, worin $p_k(t)$ eine periodische Funktion der Zeit und $z_k(x)$ die k -te Eigenfunktion des Trägers (ohne Feder und Masse M) ist. Im folgenden erstrecken sich, wenn nicht anders bemerkt, alle Summationen von Eins bis Unendlich. Hochgestellte römische Ziffern bedeuten Ableitungen nach x , während übergesetzte Punkte Ableitungen nach der Zeit bedeuten. Da nach (2)

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \sum_v z_v^{\text{II}}(x) p_v(t),$$

so ist

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]^2 = \sum_{\sigma} \sum_{\tau} p_{\sigma} p_{\tau} z_{\sigma}^{\text{II}} z_{\tau}^{\text{II}}$$

und damit

$$\int_{x=0}^l \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]^2 dx = \sum_{\sigma} \sum_{\tau} p_{\sigma} p_{\tau} \int_{x=0}^l z_{\sigma}^{\text{II}} z_{\tau}^{\text{II}} dx.$$

Aus

$$EJ z_k^{\text{IV}} = \mu_1 \omega_k^2 z_k$$

folgt

$$EJ \int_{x=0}^l z_v^{\text{IV}} z_{\mu} dx = \omega_v^2 \int_{x=0}^l \mu_1 z_v z_{\mu} dx = \begin{cases} \omega_v^2 & (\mu = v), \\ 0 & (\mu \neq v). \end{cases}$$

Mit Hilfe partieller Integration wird weiters

$$\int_{x=0}^l z_v^{\text{IV}} z_{\mu} dx = [z_v^{\text{III}} z_{\mu}]_0^l - [z_v^{\text{II}} z_{\mu}^{\text{I}}]_0^l + \int_{x=0}^l z_v^{\text{II}} z_{\mu}^{\text{II}} dx$$

und da die in den eckigen Klammern stehenden Produkte zufolge des an den Rändern des Trägers geltenden Bedingungen verschwinden:

$$\int_{x=0}^l z_v^{\text{II}} z_{\mu}^{\text{II}} dx = \int_{x=0}^l z_v^{\text{IV}} z_{\mu} dx = \begin{cases} \frac{\omega_v^2}{EJ} & (\mu = v), \\ 0 & (\mu \neq v). \end{cases}$$

Also ist

$$\frac{EJ}{2} \int_{x=0}^l \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} p_{\sigma}^2 \omega_{\sigma}^2. \quad (\text{c})$$

Mit

$$y(l_1, t) = \sum_v z_v(l_1) p_v(t)$$

ergibt sich gemäß (a) und (c) als Ausdruck für die potentielle Energie

$$V = \frac{1}{2} \sum_v p_v^2 \omega_v^2 + \frac{1}{2} c \left[\eta^2 - 2 \eta \sum_v p_v z_v(l_1) + \sum_{\sigma} \sum_{\tau} p_{\sigma} p_{\tau} z_{\sigma}(l_1) z_{\tau}(l_1) \right]. \quad (\text{d})$$

Aus

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \sum_v z_v(x) \dot{p}_v(t)$$

und

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \sum_{\sigma} \sum_{\tau} z_{\sigma} z_{\tau} \dot{p}_{\sigma} \dot{p}_{\tau}$$

folgt bei Beachtung von (1a):

$$\frac{\mu_1}{2} \int_{x=0}^l \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \dot{p}_{\sigma}^2,$$

womit sich für die kinetische Energie T ergibt

$$T = \frac{1}{2} \sum_v \dot{p}_v^2 + \frac{1}{2} M \dot{\eta}^2. \quad (\text{e})$$

p_k und η haben hierin die Bedeutung von generalisierten Koordinaten. Die Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen erfordert die Bildung folgender Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k} &= \dot{p}_k, & \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} &= M \dot{\eta}, & \frac{\partial T}{\partial p_k} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial \eta} &= 0; \\ \frac{\partial V}{\partial \dot{p}_k} &= 0, & \frac{\partial V}{\partial \dot{\eta}} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial p_k} &= p_k \omega_k^2 + \frac{c}{2} \left[-2 \eta z_k(l_1) + z_k(l_1) \sum_{\tau} p_{\tau} z_{\tau}(l_1) + z_k(l_1) \sum_{\sigma} p_{\sigma} z_{\sigma}(l_1) \right] = \\ &= p_k \omega_k^2 + c z_k(l_1) \left[-\eta + \sum_v z_v(l_1) p_v \right], \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} &= c \left[\eta - \sum_v p_v z_v(l_1) \right]. \end{aligned}$$

Mit diesen Ausdrücken ergeben die Lagrangeschen Gleichungen die folgenden unendlich vielen simultanen gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen II. Ordnung, welche die gesuchten Bewegungsgleichungen für die Eigenschwingungen des zusammengesetzten Systems sind.

$$\ddot{p}_k + p_k \omega_k^2 + c z_k(l_1) \left[-\eta + \sum_v p_v z_v(l_1) \right] = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \infty), \quad (3a)$$

$$M \ddot{\eta} + c \left[\eta - \sum_v p_v z_v(l_1) \right] = 0. \quad (3b)$$

Integration der Bewegungsgleichungen.

Es ist leicht ersichtlich, daß sich η aus dem System der Gl. (3) eliminieren läßt. Mit

$$\gamma^2 = \frac{c}{M} \quad (4)$$

als Kreisfrequenz der Eigenschwingungen des Federpendels lautet nach Durchführung der Elimination das lineare, homogene Differentialgleichungssystem IV. Ordnung für die Variablen p_k ($k = 1, 2, \dots$):

$$\ddot{p}_k + (\omega_k^2 + \gamma^2) \ddot{p}_k + c z_k(l_1) \sum_{v=1}^{\infty} \ddot{p}_v z_v(l_1) + \gamma^2 \omega_k^2 p_k = 0. \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

Als Lösungsansatz wird

$$p_k(t) = A_k e^{i\Omega t} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (6)$$

verwendet, mit Ω als gesuchter Kreisfrequenz der Eigenschwingungen des zusammengesetzten Systems. Nach einiger Umformung geht nach Einführung von (6) das System (5) über in das lineare, homogene algebraische Gleichungssystem für die Unbekannten A_k :

$$A_k (\omega_k^2 - \Omega^2) (\gamma^2 - \Omega^2) - c \Omega^2 z_k(l_1) \sum_v z_v(l_1) A_v = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Multipliziert man diese Gleichungen jeweils mit $z_k(l_1)$ ($k = 1, 2, \dots$) und dividiert jede der Gleichungen durch $(\omega_k^2 - \Omega^2) (\gamma^2 - \Omega^2)$ ($k = 1, 2, \dots$), so folgt

$$z_k(l_1) A_k - \frac{c \Omega^2}{\gamma^2 - \Omega^2} \frac{z_k^2(l_1)}{\omega_k^2 - \Omega^2} \sum_v z_v(l_1) A_v = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Eine Summation aller dieser Gleichungen ergibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k(l_1) A_k - \frac{c \Omega^2}{\gamma^2 - \Omega^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k^2(l_1)}{\omega_k^2 - \Omega^2} \sum_{v=1}^{\infty} z_v(l_1) A_v = 0.$$

Ändert man den Summationsindex im ersten Gliede der vorstehenden Gleichung, so läßt sie sich umformen in das Produkt

$$\left[\sum_{v=1}^{\infty} z_v(l_1) A_v \right] \left[1 - \frac{c \Omega^2}{\gamma^2 - \Omega^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k^2(l_1)}{\omega_k^2 - \Omega^2} \right] = 0.$$

Die gesuchte Frequenzgleichung des betrachteten Systems lautet demnach, da

$$\sum_{v=1}^{\infty} z_v(l_1) A_v \neq 0:$$

$$1 = \frac{c \Omega^2}{\gamma^2 - \Omega^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k^2(l_1)}{\omega_k^2 - \Omega^2}. \quad (8)$$

Das Verhältnis $\frac{A_k}{A_1}$ gemäß

$$\frac{A_k}{A_1} = \frac{z_k(l_1)}{z_1(l_1)} \frac{\omega_1^2 - \Omega^2}{\omega_k^2 - \Omega^2} \quad (9)$$

befriedigt das Gleichungssystem (7), wie man sich durch Einsetzen überzeugt:

$$\begin{aligned} \frac{z_k(l_1)}{z_1(l_1)} (\omega_1^2 - \Omega^2) (\gamma^2 - \Omega^2) - c \Omega^2 z_k(l_1) \sum_v z_v(l_1) \frac{z_v(l_1)}{z_1(l_1)} \frac{\omega_1^2 - \Omega^2}{\omega_v^2 - \Omega^2} = \\ = \frac{z_k(l_1)}{z_1(l_1)} (\omega_1^2 - \Omega^2) (\gamma^2 - \Omega^2) \left[1 - \frac{c \Omega^2}{\gamma^2 - \Omega^2} \sum_v \frac{z_v^2(l_1)}{\omega_v^2 - \Omega^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

Gemäß (6) und (9) lautet also die Lösung des Systems von linearen Differentialgleichungen (5) entsprechend den unendlich vielen Lösungen Ω_τ ($\tau = 1, 2, \dots$) der Frequenzgleichung (8):

$$p_k = \sum_{\tau=1}^{\infty} A_{1\tau} \frac{z_k(l_1)}{z_1(l_1)} \frac{\omega_1^2 - \Omega_\tau^2}{\omega_k^2 - \Omega_\tau^2} e^{i\Omega_\tau t} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

oder mit $A_{1\tau} \frac{\omega_1^2 - \Omega_\tau^2}{z_1(l_1)} = B_\tau$:

$$p_k = z_k(l_1) \sum_{\tau=1}^{\infty} B_\tau \frac{e^{i\Omega_\tau t}}{\omega_k^2 - \Omega_\tau^2}. \quad (10)$$

Aus der Gl. (3a) erhält man für $\eta(t)$:

$$\eta(t) = \frac{\ddot{p}_k + \omega_k^2 p_k}{c z_k(l_1)} + \sum_v p_v z_v(l_1).$$

Unter Benützung von (10) und (8) wird

$$\ddot{p}_k + \omega_k^2 p_k = z_k(l_1) \sum_\tau B_\tau e^{i\Omega_\tau t}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_v p_v z_v(l_1) &= \sum_v z_v(l_1) \sum_\tau B_\tau z_v(l_1) \frac{e^{i\Omega_\tau t}}{\omega_v^2 - \Omega_\tau^2} = \sum_\tau B_\tau e^{i\Omega_\tau t} \sum_v \frac{z_v^2(l_1)}{\omega_v^2 - \Omega_\tau^2} = \\ &= \sum_\tau B_\tau e^{i\Omega_\tau t} \frac{\gamma^2 - \Omega_\tau^2}{c \Omega_\tau^2}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung für η ein, so erhält man nach kurzer Rechnung

$$\eta(t) = \frac{1}{M} \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{B_{\tau}}{\Omega_{\tau}^2} e^{i\Omega_{\tau}t}. \quad (11)$$

Da $y(x, t) = \sum_v p_v(t) z_v(x)$, so ist mit (10)

$$y(x, t) = \sum_{\tau=1}^{\infty} B_{\tau} e^{i\Omega_{\tau}t} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{z_v(x) z_v(l_1)}{\omega_v^2 - \Omega_{\tau}^2}. \quad (12)$$

Um mit dimensionslosen Größen zu operieren, setze man

$$z_v(x) = \frac{\zeta_v(x)}{\sqrt{m}}, \quad (13)$$

$$\alpha = \frac{M}{m}, \quad (14)$$

worin m die Masse des Trägers und M die Zusatzmasse ist. Damit formt sich die Frequenzgleichung (8) um in

$$\frac{\gamma^2}{\Omega^2} - 1 = \frac{c}{m} \sum_v \frac{\zeta_v^2(l_1)}{\omega_v^2 - \Omega^2} = \alpha \gamma^2 \sum_v \frac{\zeta_v^2(l_1)}{\omega_v^2 - \Omega^2},$$

oder

$$\gamma^2 - \Omega^2 = \gamma^2 \alpha \frac{\Omega^2}{\omega_1^2} \sum_v \frac{\zeta_v^2(l_1)}{\left(\frac{\omega_v}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2}.$$

Bezeichnet man das Verhältnis der Frequenzen Ω zur Frequenz der Grundschwingung ω_1 des Trägers mit Λ und das Verhältnis der Eigenfrequenzen ω_v des Trägers zur Grundfrequenz ω_1 mit ϱ_v , also

$$\Lambda_{\tau} \equiv \frac{\Omega_{\tau}^2}{\omega_1^2}, \quad \varrho_v \equiv \frac{\omega_v}{\omega_1} \quad (15)$$

und führt ferner zur Abkürzung den schon von Young in seiner zitierten Arbeit¹ benützten Ausdruck

$$g_1(\Lambda) = \Lambda^2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\zeta_v^2(l_1)}{\varrho_v^2 - \Lambda^2} \quad (16)$$

ein, so stellt sich schließlich die Frequenzgleichung (8) in der Form dar:

$$1 - \Lambda^2 \left(\frac{\omega_1}{\gamma} \right)^2 = \alpha g_1(\Lambda). \quad (8a)$$

Unter Benützung von (13) und (15) erhält man aus (10), (11) und (12)

$$p_k = \frac{\zeta_k(l_1)}{\omega_1^2 \sqrt{m}} \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{B_{\tau} e^{i\Omega_{\tau}t}}{\varrho_k^2 - \Lambda_{\tau}^2} \quad ([p_k] = L\sqrt{M}), \quad (10a)$$

$$\eta(t) = \frac{1}{M \omega_1^2} \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{B_{\tau}}{\Lambda_{\tau}^2} e^{i\Omega_{\tau}t} \quad ([\eta] = \left[\frac{B_{\tau}}{M \omega_1^2} \right] = L), \quad (11a)$$

$$y(x, t) = \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{B_{\tau}}{m \omega_1^2} e^{i\Omega_{\tau}t} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\zeta_v(x) \zeta_v(l_1)}{\varrho_v^2 - \Lambda_{\tau}^2}. \quad (12a)$$

Zur Bestimmung der Konstanten B_{τ} müssen die Anfangswerte

$$y(x, 0), \quad \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)_{t=0}, \quad \eta(0) \quad \text{und} \quad \dot{\eta}(0)$$

gegeben sein. Aus $y(x, t) = \sum_v p_v(t) z_v(x)$ folgt nach Multiplikation mit $\mu_1 z_\mu(x)$ und Integration über die Länge l gemäß den Gl. (1):

$$\int_{x=0}^l \mu_1 z_\mu(x) y(x, t) dx = p_\mu(t),$$

$$\int_{x=0}^l \mu_1 z_\mu(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} dx = \dot{p}_\mu(t).$$

Man erhält ein System von unendlich vielen algebraischen inhomogenen Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten B_τ .

Wäre beispielsweise zur Zeit $t = 0$

$$y(x, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = 0, \quad \dot{\eta}(0) = 0, \quad \eta(0) = \eta_0,$$

also auch

$$p_k(0) = 0, \quad \dot{p}_k(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

dann erhält man mit

$$B_\tau e^{i\Omega_\tau t} = C_\tau \cos \Omega_\tau t + D_\tau \sin \Omega_\tau t$$

[da sich aus der Frequenzgleichung (8) paarweise entgegengesetzt gleiche Werte Ω_τ ergeben] aus den Gl. (11a) und (10a)

$$\eta_0 M \omega_1^2 = \sum_\tau \frac{C_\tau}{A_\tau^2}, \quad 0 = \sum_v \frac{C_\tau}{\varrho_k^2 - A_\tau^2} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$0 = \sum_\tau \frac{\Omega_\tau}{A_\tau^2} D_\tau, \quad 0 = \sum_\tau \frac{\Omega_\tau}{\varrho_k^2 - A_\tau^2} D_\tau \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Aus der zweiten Gruppe dieser Gleichungen folgt $D_\tau = 0$. Für C_τ läßt sich nach längerer Rechnung, die für 3, 4, 5, ... Unbekannte vorgenommen wurde, das Gesetz erkennen:

$$C_\tau = \eta_0 M \omega_1^2 A_\tau^2 X_\tau, \quad \text{worin} \quad X_\tau = \frac{\prod_{\sigma=1}^{\infty} \left(1 - \frac{A_\tau^2}{\varrho_\sigma^2}\right)}{\prod_{\substack{\mu=1 \\ (\mu \neq \tau)}}^{\infty} \left(1 - \frac{A_\tau^2}{A_\mu^2}\right)}.$$

Die Gleichungen für $\eta(t)$ und $y(x, t)$ lauten dann

$$\eta(t) = \eta_0 \sum_\tau X_\tau \cos \Omega_\tau t,$$

$$y(x, t) = \eta_0 \alpha \sum_\tau A_\tau^2 X_\tau \cos \Omega_\tau t \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\zeta_v(x) \zeta_v(l_1)}{\varrho_v^2 - A_\tau^2}.$$

Numerische Ergebnisse.

Bei gegebenem c (Federzahl), m (Masse des Trägers) und M (Zusatzmasse) sind $\gamma = \sqrt{\frac{c}{M}}$ und $\alpha = \frac{M}{m}$ bestimmt und $\Lambda^2 = \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2$ ist die einzige Unbekannte in der Frequenzgleichung (8a). Es ist klar, daß die rechnerische Ermittlung des zugehörigen Λ^2 -Wertes aus dieser Gleichung mit sehr erheblichem Zeitaufwand verbunden ist, wenn einige Genauigkeit angestrebt wird. Dagegen ist die Bestimmung des Wertes von γ bei gegebenem α und angenommenem Λ aus Gl. (8a) mit großer

Genauigkeit möglich, ein Weg, der schon von Young¹ eingeschlagen wurde. Eine graphische Darstellung von γ als Funktion von Λ für verschiedene Massenverhältnisziffern α erlaubt dann umgekehrt die Ermittlung der zugehörigen Werte Λ für gegebene γ .

Um den Vergleich der Ergebnisse mit denen der eingangs zitierten Arbeit von Dana Young¹ zu ermöglichen, wird zuvor die Frequenzgleichung mit Einführung der Federzahl c_b einer einseitig eingespannten Blattfeder einer Umformung unterzogen. Es ist

$$c_b = \frac{3 EJ}{l^3}. \quad (17)$$

Führt man die Bezeichnung

$$\beta_k^4 = \frac{\mu_1 \omega_k^2}{EJ} \left(\mu_1 = \frac{m}{l} \right) \quad (18)$$

ein, so geht diese mit (17) über in

$$\beta_k^4 = \frac{3 \mu_1 \omega_k^2}{c_b l^3}. \quad (18a)$$

Mit der Ziffer

$$\varepsilon_k = \frac{3}{(\beta_k l)^4} \quad (19)$$

erhält man aus (18a)

$$\omega_k^2 = \frac{c_b}{m \varepsilon_k}. \quad (20)$$

Die Frequenzgleichung (8a):

$$1 - \Lambda^2 \frac{\omega_1^2}{\gamma^2} = \alpha g_1(\Lambda)$$

verwandelt sich dann in

$$\frac{c}{c_b} = \frac{\Lambda^2}{\varepsilon_1} \frac{\alpha}{1 - \alpha g_1(\Lambda)}. \quad (8b)$$

Im Gegensatz dazu lautet die Frequenzgleichung für den von Young behandelten Fall¹:

$$\frac{c}{c_b} = \frac{\Lambda^2}{\varepsilon_1} \left(\alpha - \frac{1}{g_1(\Lambda)} \right).$$

Beide Gleichungen für $\frac{c}{c_b}$ müssen denselben Wert ergeben, wenn bei dem von Young behandelten Fall die Masse M zu Null und hier M unendlich groß angenommen wird. $M = 0$ entspricht $\alpha = 0$ und für $M \rightarrow \infty$ wird auch $\alpha \rightarrow \infty$. Beide Formeln liefern dann den Wert

$$\frac{c}{c_b} = - \frac{\Lambda^2}{\varepsilon_1 g_1(\Lambda)}.$$

Wird $M = 0$, dann ist $\Omega_k = \omega_k$. Ist $m = 0$, also der Träger eine masselos gedachte Blattfeder, so muß die Frequenzgleichung (8a) einer Umformung unterzogen werden. Mit

$$\lambda_k = \beta_k l \quad (21)$$

ist nach Gl. (18)

$$\omega_k^2 = \frac{EJ}{m l^3} \lambda_k^4. \quad (20a)$$

Führt man diesen Wert in Gl. (16) ein, so folgt mit $\Lambda = \frac{\Omega}{\omega_1}$

$$g_1(\Lambda) = \frac{m l^3}{EJ} \Omega^2 \sum_v \frac{\zeta_v^2(l_1)}{\lambda_v^4 \frac{m l^3}{EJ} \Omega^2}.$$

Mit diesem Werte geht die Frequenzgleichung (8a) nach leichter Umformung über in

$$c = \frac{M \Omega^2}{1 - \frac{M l^3}{EJ} \Omega^2 \sum_v \frac{\zeta_v^2(l_1)}{\lambda_v^4 - \frac{m l^3}{EJ} \Omega^2}}$$

und für $m = 0$ in

$$\frac{c}{M \Omega^2} = \frac{1}{1 - \frac{M l^3}{EJ} \Omega^2 \sum_v \frac{\zeta_v^2(l_1)}{\lambda_v^4}}$$

oder

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{M \Omega^2} - \frac{l^3}{EJ} \sum_v \frac{\zeta_v^2(l_1)}{\lambda_v^4}. \quad (22)$$

Die Differentialgleichung für die Eigenfunktionen $\zeta_k(x)$ des Trägers allein lautet mit $\bar{x} = \frac{x}{l}$:

$$\zeta_k^{\text{IV}}(\bar{x}) - \lambda_k^4 \zeta_k(\bar{x}) = 0;$$

gleichwertig hierzu ist die „quellenmäßige“ Darstellung von $\zeta_k(\bar{x})$ durch eine Integralgleichung

$$\zeta_k(\bar{x}) = \lambda_k^4 \int_0^1 K(\bar{x}, \bar{\xi}) \zeta(\bar{\xi}) d\bar{\xi}.$$

Für den symmetrischen Kern $K(\bar{x}, \bar{\xi})$ (Greensche Einflußfunktion) gilt die „bilineare Relation“ (s. z. B. Courant-Hilbert², S. 278)

$$K(\bar{x}, \bar{\xi}) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\zeta_v(\bar{x}) \zeta_v(\bar{\xi})}{\lambda_v^4}. \quad (23)$$

Es ist daher

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\zeta_v^2(l_1)}{\lambda_v^4} = K\left(\frac{l_1}{l}, \frac{l_1}{l}\right) \equiv K_{11} \quad (23a)$$

und Gl. (22) geht damit über in

$$\frac{1}{M \Omega^2} = \frac{1}{c} + \frac{l^3}{EJ} K_{11}. \quad (24)$$

Für den Fall des einseitig eingespannten Trägers ist bekanntlich⁴

$$K(\bar{x}, \bar{\xi}) = \begin{cases} \frac{1}{6} x^2 (3 \bar{\xi} - \bar{x}) & (x \leq \xi), \\ \frac{1}{6} \bar{\xi}^2 (3 \bar{x} - \bar{\xi}) & (\bar{x} \geq \bar{\xi}), \end{cases} \quad (25)$$

$$K(\bar{x}, \bar{x}) = \frac{1}{3} \bar{x}^3, \quad (25a)$$

womit Gl. (24) lautet:

$$\frac{1}{M \Omega^2} = \frac{1}{c} + \frac{l_1^3}{3 EJ} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c_1},$$

in Übereinstimmung mit dem Gesetz für die Reihenschaltung zweier Federn mit den Federzahlen c und $c_1 = \frac{3 EJ}{l_1^3}$.

⁴ Siehe z. B. Hort-Thoma: Die Differentialgleichungen der Technik und Physik, 4. Aufl., S. 685. Leipzig: J. A. Barth. 1944.

Für den Fall des beidseitig gelenkig gelagerten Trägers ist

$$K(\bar{x}, \bar{\xi}) = \frac{1}{6} \bar{x} (1 - \bar{\xi}) (2\bar{\xi} - \bar{\xi}^2 - \bar{x}^2) \quad (\bar{x} \leq \bar{\xi}), \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \quad (26)$$

$$= \frac{1}{6} \bar{\xi} (1 - \bar{x}) (2\bar{x} - \bar{x}^2 - \bar{\xi}^2) \quad (\bar{x} \geq \bar{\xi}), \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$

$$K(\bar{x}, \bar{x}) = \frac{1}{6} \bar{x} (1 - \bar{x}) (2\bar{x} - 2\bar{x}^2) = \frac{1}{3} \bar{x}^2 (1 - \bar{x})^2. \quad (26a)$$

Gl. (24) ergibt für diesen Fall

$$\frac{1}{M\Omega^2} = \frac{1}{c} + \frac{l^3}{3EJ} \frac{l_1^2}{l^2} \left(1 - \frac{l_1}{l}\right)^2.$$

Bezeichnet $l_1' = l - l_1$, so ist der zweite Summand in obiger Gleichung

$$\frac{1}{EJ} \frac{l^3}{3} \frac{l_1^2}{l^2} \frac{l_1'^2}{l^2}$$

gleich $\frac{f}{P}$, wenn f die Durchbiegung dieses Trägers an Stelle der Last P bedeutet.

Im folgenden wird die Frequenzgleichung (8b) für zwei häufig vorkommende Lagerungsfälle des Trägers ausgewertet.

A. Einseitig eingespannter Träger (Abb. 4).

Die Gleichung für die Eigenfunktion $z_k(x)$ lautet mit β_k nach Gl. (18)

$$z_k(x) = C [\cos \beta_k x - \cos \beta_k x - \sigma_k (\sin \beta_k x - \sin \beta_k x)],$$

worin mit $\lambda_k = \beta_k l$

$$\sigma_k = \frac{\cos \lambda_k + \cos \lambda_k}{\sin \lambda_k + \sin \lambda_k}.$$

Die Normalisierungsbedingung (1b) ergibt, da

$$\int_{x=0}^l z_k^2(x) dx = C^2 l,$$

für C den Wert

$$C = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Da nach (13)

$$\zeta_k(x) = \sqrt{m} z_k(x),$$

so ist

$$\zeta_k(x) = \cos \beta_k x - \cos \beta_k x - \sigma_k (\sin \beta_k x - \sin \beta_k x). \quad (27)$$

Die Frequenzgleichung für diesen Fall lautet

$$1 + \cos \lambda_k \cos \lambda_k = 0. \quad (28)$$

Für große Ziffern k kann mit ausreichender Genauigkeit

$$\lambda_k = (2k - 1) \frac{\pi}{2}$$

und $\sigma_k = 1$ gesetzt werden.

Aus (28) ergeben sich folgende Wurzeln:

| | | | | | | |
|---------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $k =$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $\lambda_k = \beta_k l =$ | 1.87510 | 4.69409 | 7.85476 | 10.9955 | 14.1372 | 17.2788 |
| $k =$ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| $\lambda_k =$ | 20.4204 | 23.5620 | 26.7035 | 29.8451 | 32.9867 | 36.1283 |

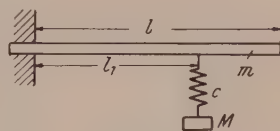


Abb. 4.

Die Zahlenrechnung wurde für den von Young benützten Wert $l_1 = 0.78 l$ und für $l_1 = l$ durchgeführt. Um den Umfang dieser Arbeit nicht allzu sehr zu vergrößern, werden hier die Ergebnisse der Rechnung nur für den praktisch wichtigeren Fall $l_1 = l$ mitgeteilt.

Für $l_1 = l$ wird aus (27) für alle Indexziffern k

$$\zeta_k^2(l_1) = 4$$

und damit nach Gl. (16):

$$g_1(A) = 4 A^2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho_v^2 - A^2} \quad \left(\varrho_v = \frac{\omega_v}{\omega_1} = \frac{\lambda_v^2}{\lambda_1^2} \right). \quad (29)$$

Tabelle 1.

$g_1(A)$ nach Gl. (29) und $\frac{c}{c_0}$ nach Gl. (30) für $\frac{M}{m} = \alpha = 0.1, 0.2, 0.4, 1, 10$.

| A | $g_1(A)$ | $\frac{c}{c_0}$ | | | | |
|---------|-----------|-----------------|----------------|----------------|--------------|---------------|
| | | $\alpha = 0.1$ | $\alpha = 0.2$ | $\alpha = 0.4$ | $\alpha = 1$ | $\alpha = 10$ |
| 0.1 | 0.04161 | 0.00414 | 0.00831 | 0.01676 | 0.04300 | 0.70576 |
| 0.15397 | 0.1 | 0.00987 | 0.01994 | 0.04071 | 0.1086 | ∞ |
| 0.2 | 0.17150 | 0.01677 | 0.03414 | 0.07079 | 0.1990 | — |
| 0.3 | 0.40650 | 0.03866 | 0.08074 | 0.1772 | 0.6249 | — |
| 0.4 | 0.78130 | 0.07152 | 0.1563 | 0.3836 | 3.0147 | — |
| 0.44292 | 1.0 | 0.08982 | 0.2021 | 0.5389 | ∞ | — |
| 0.5 | 1.36369 | 0.1193 | 0.2833 | 0.9066 | — | — |
| 0.6 | 2.29382 | 0.1925 | 0.5482 | 7.1951 | — | — |
| 0.61664 | 2.5 | 0.2089 | 0.6268 | ∞ | — | — |
| 0.7 | 3.90295 | 0.3312 | 1.8405 | — | — | — |
| 0.74310 | 5.0 | 0.4551 | ∞ | — | — | — |
| 0.8 | 7.18950 | 0.9384 | — | — | — | — |
| 0.84409 | 10.0 | ∞ | — | — | — | — |
| 0.9 | 17.1522 | — | — | — | — | — |
| 1.0 | ∞ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1.2 | — 12.9113 | 0.2590 | 0.3313 | 0.3850 | 0.4266 | 0.4561 |
| 1.4 | — 7.9193 | 0.4507 | 0.6252 | 0.7752 | 0.9055 | 1.0072 |
| 1.6 | — 6.2365 | 0.6497 | 0.9388 | 1.2075 | 1.4578 | 1.6648 |
| 1.8 | — 5.3643 | 0.8690 | 1.2882 | 1.6977 | 2.0979 | 2.4434 |
| 2.0 | — 4.8033 | 1.1135 | 1.6814 | 2.2569 | 2.8403 | 3.3616 |
| 3.0 | — 3.1368 | 2.8231 | 4.5579 | 6.5794 | 8.9651 | 11.458 |
| 4.0 | — 1.2019 | 5.8858 | 10.631 | 17.810 | 29.944 | 50.644 |
| 4.3853 | 0 | 7.9246 | 15.849 | 31.698 | 79.246 | 792.46 |
| 4.4118 | 0.1 | 8.1017 | 16.369 | 33.419 | 89.118 | ∞ |
| 4.6218 | 1.0 | 9.7806 | 22.006 | 58.684 | ∞ | — |
| 4.8653 | 2.5 | 13.113 | 39.338 | ∞ | — | — |
| 5.0 | 3.3428 | 15.475 | 62.164 | — | — | — |
| 5.1786 | 5.0 | 22.102 | ∞ | — | — | — |
| 5.5051 | 10.0 | ∞ | — | — | — | — |
| 6.0 | 40.6134 | — | — | — | — | — |
| 6.2669 | ∞ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7.0 | — 23.1801 | 6.0855 | 7.1653 | 7.8628 | 8.3506 | 8.6734 |
| 8.0 | — 12.9737 | 11.480 | 14.673 | 17.044 | 18.873 | 20.173 |
| 9.0 | — 9.8836 | 16.787 | 22.426 | 26.954 | 30.668 | 33.433 |
| 10.0 | — 8.0744 | 22.799 | 31.518 | 38.969 | 45.411 | 50.411 |

Für angenommene Werte A kann g_1 aus dieser Gleichung berechnet werden (Tabelle 1). Je größer A ist, um so mehr Glieder der Reihe müssen berücksichtigt werden. Sind

von einer Stelle $\nu = \sigma$ an die Λ^2 -Werte sehr klein gegen die Werte ϱ_v^2 , so kann man sie von dieser Stelle ab vernachlässigen. Für die Restsumme

$$\sum_{\nu=\sigma+1}^{\infty} \frac{1}{\varrho_v^2}$$

kann nach (23a) und (25a) der Wert angegeben werden. Es wird

$$\sum_{\nu=\sigma+1}^{\infty} \frac{1}{\varrho_v^2} = \frac{\lambda_1^4}{12} - \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{1}{\varrho_v^2}.$$

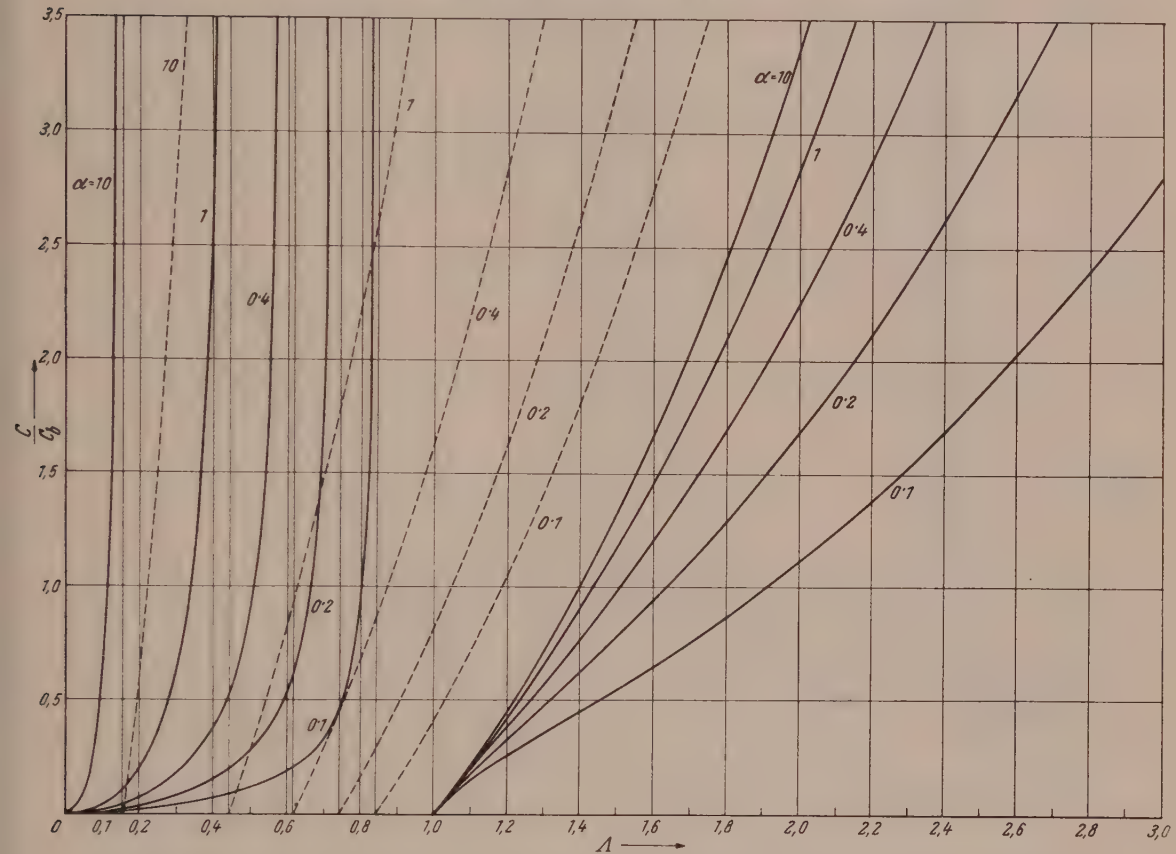


Abb. 5. Eigenfrequenzen des Kragträgers; Feder und Zusatzmasse am freien Trägerende.

Mit bekannten Werten $g_1(A)$ berechnet sich dann $\frac{c}{c_b}$ gemäß (8b) aus

$$\frac{c}{c_b} = 4 \cdot 12077 \Lambda^2 \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - g_1(\Lambda)}. \quad (30)$$

In der Tabelle 1 sind die Werte $g_1(\Lambda)$ und die aus der vorstehenden Gleichung für fünf verschiedene Massenverhältnisziffern $\alpha = 0.1, 0.2, 0.4, 1, 10$ berechneten $\frac{c}{c_b}$ -Werte eingetragen. Die graphischen Darstellungen der Abb. 5 und 6 stellen Λ als Funktion von $\frac{c}{c_b}$ für verschiedene Massenverhältnisziffern α dar. Abb. 5 gilt für kleinere $\frac{c}{c_b}$ und Λ -Werte ($0 < \frac{c}{c_b} < 3.5, 0 < \Lambda < 3$), während Abb. 6 vier auf-

einanderfolgende Wurzeln Λ bei gegebenem $\frac{c}{c_b}$ ($0 < \frac{c}{c_b} \leq 350$) abzulesen gestattet. Der Deutlichkeit wegen sind die in dem schmalen Bereiche $0 < \Lambda < 1$ liegenden Kurven weggelassen worden. Für das Intervall $0 < \frac{c}{c_b} < 3.5$ können die fehlenden Λ -Werte aus Abb. 5 entnommen werden, während für $\frac{c}{c_b} > 3.5$ die Formel (40) der

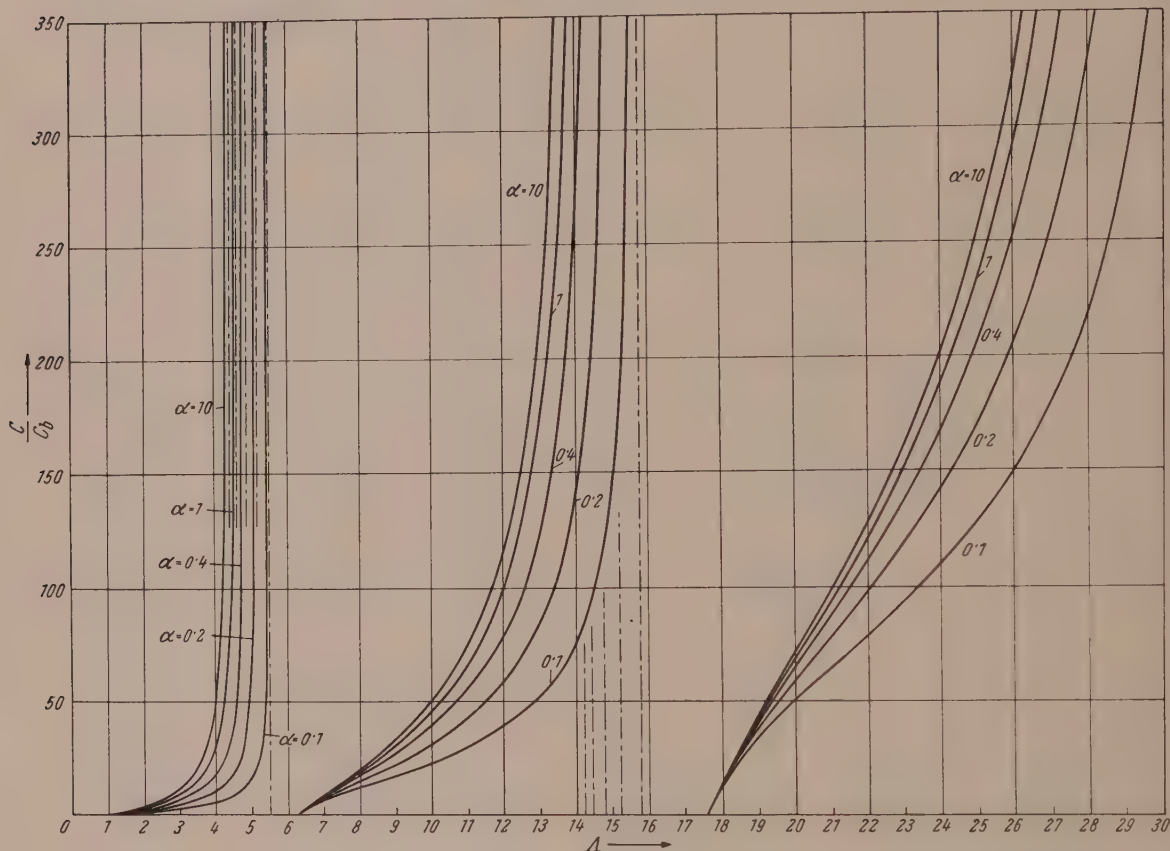


Abb. 6. Eigenfrequenzen des Kragträgers; Feder und Zusatzmasse am freien Trägerende.

später gezeigten Näherungsrechnung die ersten Wurzeln Λ mit ausreichender Genauigkeit wiedergibt.

Wird jeweils $\Lambda = \varrho_1, \varrho_2, \dots$, so wird $g_1(\Lambda) = \infty$ und $\frac{c}{c_b} = 0$; wird $g_1(\Lambda) = \frac{1}{\alpha}$, so geht $\frac{c}{c_b}$ gegen Unendlich; die Stellen Λ_α stellen also Asymptoten der betreffenden Kurven dar. Diese Asymptoten sind in den Abbildungen strichpunktuiert eingezeichnet worden, die Λ_α -Werte können aus der Tabelle 1 entnommen werden.

Zur Gegenüberstellung sind außerdem in der Abb. 5 einige der Youngschen Lösung

$$\frac{c}{c_b} = 4.12077 \Lambda^2 \left(\alpha - \frac{1}{g_1(\Lambda)} \right)$$

entsprechende $\left(\frac{c}{c_b}, \Lambda \right)$ -Kurven strichliert eingezeichnet worden. Gleiche $\frac{c}{c_b}$ und α -Werte liefern in diesem Falle wesentlich höhere Λ -Werte.

B. An den Enden frei aufliegender Träger (Abb. 7).

In diesem Falle sind die Eigenfunktionen gegeben durch

$$z_k(x) = C \sin \beta_k x$$

und da zufolge (1b)

$$C = \frac{\sqrt{2}}{m},$$

folgt nach (13)

$$\zeta_k(x) = \sqrt{2} \sin \beta_k x.$$

Die Eigenwerte bestimmen sich aus

$$\lambda_k = \beta_k l = k \pi;$$

damit ergibt sich nach (18)

$$\omega_k^2 = k^2 \pi^2 \frac{EJ}{m l^3} \text{ bzw. } \varrho_k^2 = k^4.$$

Mit diesen Werten wird nach (16)

$$g_1(A) = 2 A^2 \sum_v \frac{\sin^2 v \pi \frac{l_1}{l}}{v^4 - A^2}. \quad (31)$$

Gemäß (19) ist hier

$$\varepsilon_1 = \frac{3}{\pi^4}$$

und $\frac{c}{c_b}$ berechnet sich aus

$$\frac{c}{c_b} = \frac{\pi^4}{3} A^2 \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - g_1(A)}, \quad (32)$$

worin $c_b = \frac{3 EJ}{l^3}$ beibehalten wurde. Es wäre sinngemäß, hier c_b etwa durch ein $c_b' = \frac{48 EJ}{l^3}$ zu ersetzen, welches der Federzahl einer in der Mitte belasteten, an den Enden gestützten Blattfeder entsprechen würde. Um den Vergleich mit den früher erhaltenen Werten zu ermöglichen, wurde aber c_b als Verhältniszahl beibehalten.

Die Zahlenrechnung wurde wieder für $l_1 = 0.78 l$ und $l_1 = \frac{l}{2}$ durchgeführt und im folgenden die Ergebnisse für $l_1 = \frac{l}{2}$, wo Feder und Masse in Trägermitte angebracht sind, mitgeteilt.

Nach (31) ist für $l_1 = \frac{l}{2}$

$$g_1(A) = 2 A^2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{v \pi}{2}}{v^4 - A^2} = 2 A^2 \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{v^4 - A^2} = 2 A^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4 - A^2}, \quad (31a)$$

da $\sin \frac{v \pi}{2}$ für alle geraden Zahlen v verschwindet.

Nun gilt die Beziehung⁵

$$\frac{\operatorname{tg} u}{u} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right]^2 - z^2},$$

⁵ Siehe etwa W. Magnus und F. Oberhettinger: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, S. 214, 215., Berlin: Springer-Verlag. 1948.

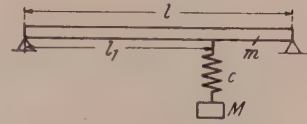


Abb. 7.

die mit $u = \pi x$ übergeht in

$$\frac{\operatorname{tg} \pi x}{\pi x} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 - 4x^2}. \quad (33)$$

Gl. (31 a) kann nun umgeformt werden in

$$g_1(\Lambda) = \Lambda \left\{ \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(2v-1)^2 - \Lambda} - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(2v-1)^2 + \Lambda} \right\}. \quad (31 b)$$

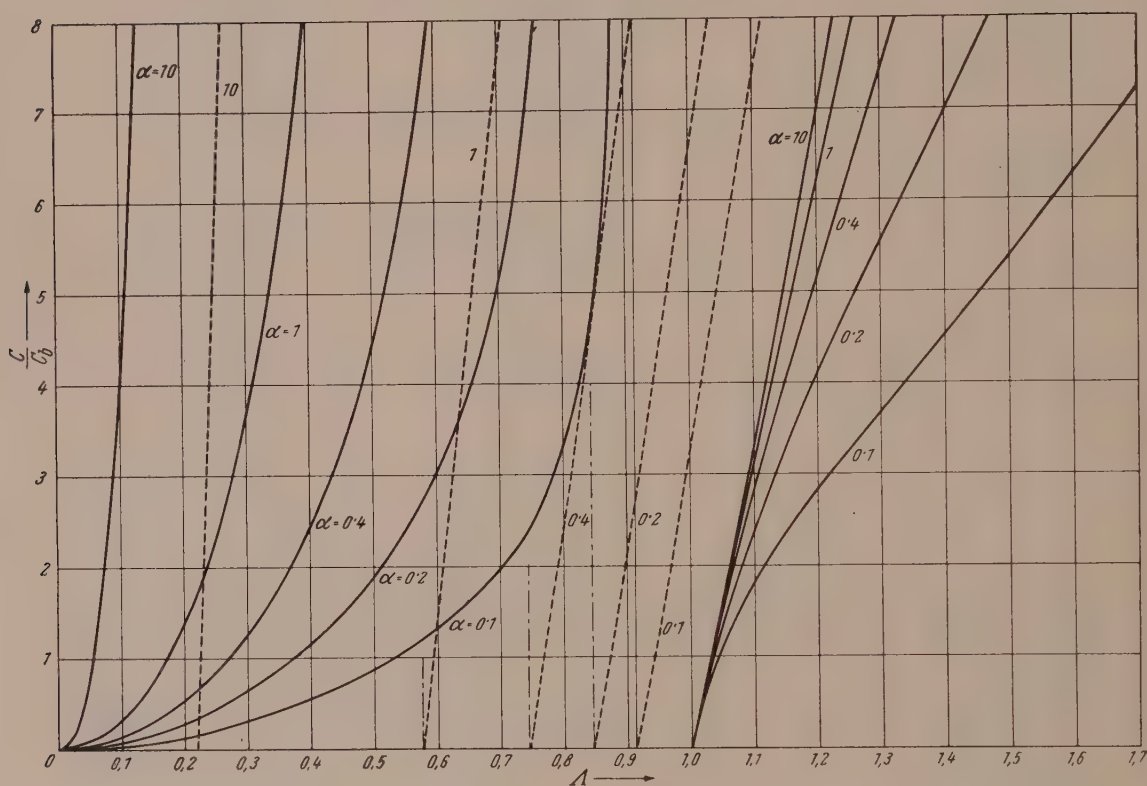


Abb. 8. Eigenfrequenzen des an den Enden frei aufliegenden Trägers, Feder und Zusatzmasse in Trägermitte.

Substituiert man in Gl. (33) für x den Wert $x = \pm \frac{\sqrt{\Lambda}}{2}$, so entsteht

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \sqrt{\Lambda}}{\frac{\pi}{2} \sqrt{\Lambda}} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(2v-1)^2 - \Lambda},$$

setzt man dagegen für x den Wert $x = \pm i \frac{\sqrt{\Lambda}}{2}$, so entsteht

$$\frac{\operatorname{Tg} \frac{\pi}{2} \sqrt{\Lambda}}{\frac{\pi}{2} \sqrt{\Lambda}} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(2v-1)^2 + \Lambda}.$$

Tabelle 2.

$g_1(\lambda)$ nach Gl. (34) und $\frac{c}{c_b}$ nach Gl. (32) für $\frac{M}{m} = \alpha = 0,1, 0,2, 0,4, 1, 10$.

| λ | $g_1(\lambda)$ | $\frac{c}{c_b}$ | | | | |
|-----------|----------------|-----------------|----------------|----------------|--------------|---------------|
| | | $\alpha = 0,1$ | $\alpha = 0,2$ | $\alpha = 0,4$ | $\alpha = 1$ | $\alpha = 10$ |
| 0.1 | 0.02050 | 0.03254 | 0.06521 | 0.1310 | 0.3315 | 4.084 |
| 0.15 | 0.04670 | 0.07340 | 0.1475 | 0.2978 | 0.7664 | 13.706 |
| 0.2 | 0.08451 | 0.1310 | 0.2642 | 0.5377 | 1.4187 | 83.842 |
| 0.21678 | 0.1 | 0.1541 | 0.3114 | 0.6358 | 1.6954 | ∞ |
| 0.3 | 0.20045 | 0.2982 | 0.6089 | 1.2708 | 3.6549 | — |
| 0.4 | 0.38566 | 0.5404 | 1.1259 | 2.4571 | 8.4565 | — |
| 0.5 | 0.67403 | 0.8704 | 1.8764 | 4.4455 | 24.902 | — |
| 0.57547 | 1 | 1.1948 | 2.6882 | 7.1686 | ∞ | — |
| 0.6 | 1.13561 | 1.3187 | 3.0248 | 8.5673 | — | — |
| 0.7 | 1.93496 | 1.9727 | 5.1909 | 28.157 | — | — |
| 0.74427 | 2.5 | 2.3982 | 7.1944 | ∞ | — | — |
| 0.8 | 3.57447 | 3.2341 | 14.577 | — | — | — |
| 0.84464 | 5 | 4.6329 | ∞ | — | — | — |
| 0.9 | 8.55027 | 18.142 | — | — | — | — |
| 0.91268 | 10 | ∞ | — | — | — | — |
| 1.0 | ∞ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1.2 | — 6.50253 | 2.8333 | 4.0649 | 5.1937 | 6.2321 | 7.0816 |
| 1.4 | — 4.02458 | 4.5378 | 7.0519 | 9.7540 | 12.666 | 15.430 |
| 1.6 | — 3.20480 | 6.2949 | 10.131 | 14.571 | 19.768 | 25.152 |
| 1.8 | — 2.79451 | 8.2224 | 13.497 | 19.870 | 27.725 | 36.345 |
| 2.0 | — 2.54402 | 10.354 | 17.216 | 25.749 | 36.647 | 49.122 |
| 3.0 | — 1.95757 | 24.439 | 42.001 | 65.558 | 98.807 | 142.03 |
| 4.0 | — 1.56494 | 44.922 | 79.135 | 127.80 | 202.55 | 312.03 |
| 5.0 | — 1.07027 | 73.326 | 133.72 | 227.36 | 392.10 | 693.64 |
| 6.0 | — 0.28164 | 113.69 | 221.32 | 420.22 | 912.04 | 3062.9 |
| 6.24875 | 0 | 126.78 | 253.57 | 507.14 | 1267.8 | 12678 |
| 6.32768 | 0.1 | 131.32 | 265.32 | 541.70 | 1444.5 | ∞ |
| 6.88056 | 1 | 170.80 | 384.30 | 1024.8 | ∞ | — |
| 7.0 | 1.26373 | 182.12 | 425.83 | 1287.0 | — | — |
| 7.42479 | 2.5 | 238.66 | 715.99 | ∞ | — | — |
| 7.90044 | 5 | 405.33 | ∞ | — | — | — |
| 8.0 | 5.82130 | 497.30 | — | — | — | — |
| 8.31599 | 10 | ∞ | — | — | — | — |
| 9.0 | ∞ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9.5 | — 21.0627 | 94.338 | 112.44 | 124.37 | 132.82 | 138.47 |
| 10.0 | — 12.0149 | 147.49 | 190.83 | 223.70 | 249.48 | 268.01 |

Damit lassen sich die Summen in (31b) durch geschlossene Ausdrücke ersetzen, und man erhält schließlich, wenn noch für $\frac{\pi}{2}\sqrt{\bar{A}}$ die Abkürzung

$$\bar{A} = \frac{\pi}{2} \sqrt{A}$$

gesetzt wird:

$$g_1(\lambda) = \frac{1}{2} \bar{A} (\operatorname{tg} \bar{A} - \operatorname{Tg} \bar{A}). \quad (34)$$

Für $m = 0$ gibt Gl. (32) mit $\omega_1^2 = \pi^4 \frac{EJ}{ml^3}$ und $\omega_1 = \frac{\Omega}{A} = \frac{\pi^2}{4} \frac{\Omega}{A^2}$ nach einiger Umformung

$$\frac{c}{c_b} = \frac{1}{\frac{c_b}{M\Omega^2} - \frac{3}{16} \frac{g_1(\lambda)}{\bar{A}^4}},$$

oder mit $c_b = \frac{3 EJ}{l^3}$:

$$\frac{1}{M\Omega^2} = \frac{1}{c} + \frac{l^3}{16 EJ} \frac{g_1(\lambda)}{\lambda^4}.$$

Nach (34) ist nun

$$\frac{g_1(\lambda)}{\lambda^4} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} \bar{\lambda} - \operatorname{Tg} \bar{\lambda}}{\bar{\lambda}^3},$$

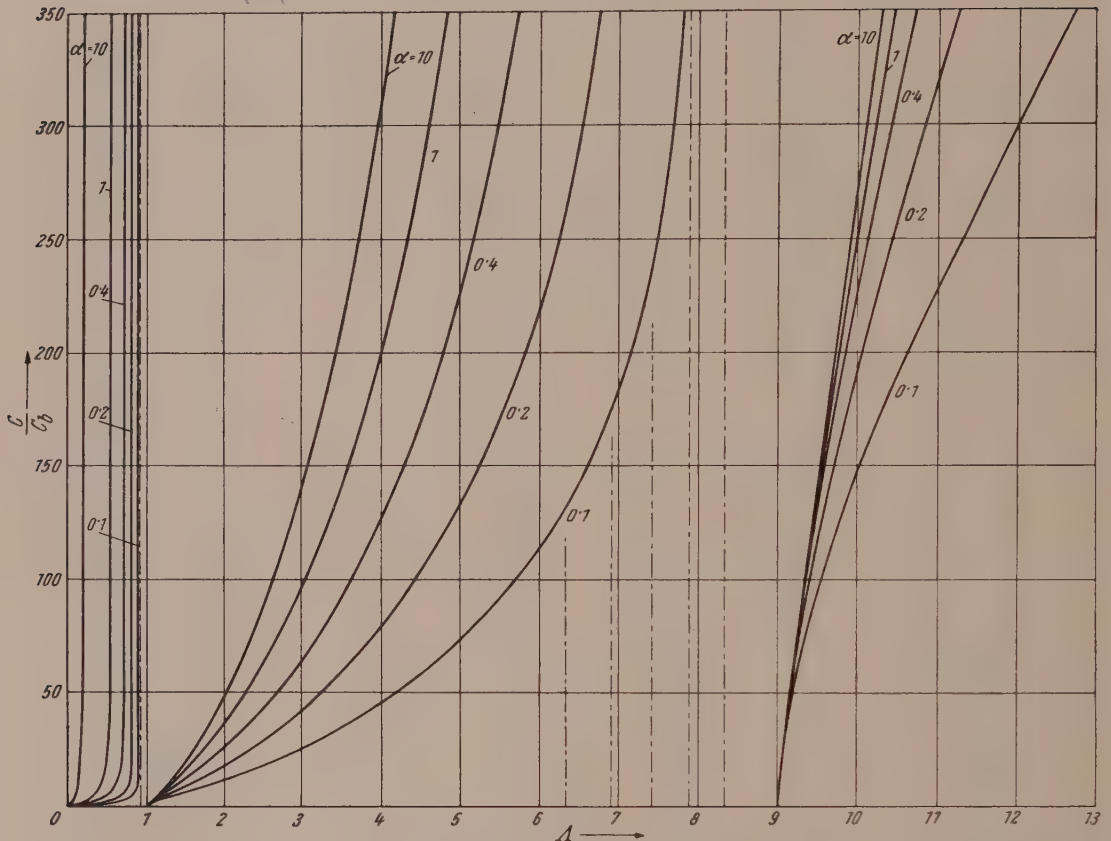


Abb. 9. Eigenfrequenzen des an den Enden frei aufliegenden Trägers. Feder und Zusatzmasse in Trägermitte.

und da $\bar{\lambda}$ für $m = 0$ verschwindet, wird der Quotient unbestimmt. Die Anwendung der Regel von de l'Hospital ergibt

$$\left. \frac{g_1(\lambda)}{\lambda^4} \right|_{\lambda=0} = \frac{1}{3}.$$

Somit ist

$$\frac{1}{M\Omega^2} = \frac{1}{c} + \frac{l^3}{48 EJ},$$

in Übereinstimmung mit dem bekannten Ergebnis.

Nach Gl. (31a) liefern hier die Werte $\lambda^2 = 2^2, 4^2, 6^2, \dots$ keine Unendlichkeitsstellen von $g_1(\lambda)$.

In der Tabelle 2 sind die nach (34) gerechneten Werte $g_1(\lambda)$ und die Verhältnisziffern $\frac{c}{c_b}$ nach Gl. (32) für $\alpha = 0.1, 0.2, 0.4, 1$ und 10 eingetragen. Die Kurven der Abb. 8 und 9 gestatten die Entnahme zweier bzw. dreier aufeinanderfolgender Werte λ

für ein gegebenes $\frac{c}{c_b}$ bei den angegebenen α -Werten. Abb. 8 gilt für einen Wertebereich $0 < \frac{c}{c_b} < 8$ und Abb. 9 für den Bereich $0 < \frac{c}{c_b} < 350$. Strichliert gezeichnete Kurven in Abb. 8 entsprechen dem Youngschen Fall:

$$\frac{c}{c_b} = \frac{\pi^4}{3} A^2 \left(\alpha - \frac{1}{g_1(A)} \right).$$

Die gesuchten Kreisfrequenzen Ω der Eigenschwingungen des zusammengesetzten Systems sind dann gemäß $\Omega = A \omega_1$ bestimmt.

Näherungsrechnung.

Es ist der Versuch naheliegend, Näherungswerte für die kleinsten Werte der Frequenz Ω dadurch zu gewinnen, daß man die Trägermasse m durch eine im Aufhängepunkt des Federpendels angebrachte konzentrierte Masse μm ersetzt, den Träger nur als masselose Feder betrachtet und die Eigenfrequenzen dieses vereinfachten Systems bestimmt.

Für den in Abb. 10 dargestellten Fall berechnet sich dann Ω aus der Gleichung

$$\Omega^4 - \Omega^2 \left[\gamma^2 + \frac{c + c_b'}{\mu m} \right] + \gamma^2 \frac{c_b'}{\mu m} = 0, \quad (35)$$

worin wieder $\gamma^2 = \frac{c}{M}$. Die Anwendung dieser Gleichung erfordert die Kenntnis von μ . Um einen Anhalt für die Wahl von μ zu bekommen, wurde aus Gl. (35) $\frac{c}{c_b}$ berechnet, wobei $c_b' = \psi c_b$ gesetzt wurde. Es ergab sich nach Einführung der bisher benützten dimensionslosen Größen

$$A = \frac{\Omega}{\omega_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{3}{\lambda_1^4}, \quad \alpha = \frac{M}{m}$$

die Gleichung

$$\frac{c}{c_b} = \frac{A^2}{\varepsilon_1} \frac{\psi - \frac{\mu}{\varepsilon_1} A^2}{\frac{1}{\alpha} \left(\psi - \frac{\mu}{\varepsilon_1} A^2 \right) - \frac{A^2}{\varepsilon_1}}. \quad (36)$$

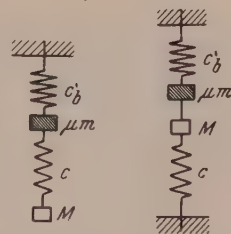


Abb. 10. Abb. 11.

Nun wurde dieses $\frac{c}{c_b}$ dem der strengen Lösung entsprechenden Werte $\frac{c}{c_b}$ nach Gl. (8b) gleichgesetzt und daraus μ berechnet. Es ergab sich

$$\mu = \frac{\varepsilon_1}{A^2} \psi - \frac{1}{g_1(A)}. \quad (37)$$

Diese Gleichung stimmt völlig überein mit der von Young unter den gleichen Voraussetzungen für den in Abb. 11 dargestellten Fall abgeleiteten Gleichung für μ^1 , und die dort gezeichneten Diagramme und getroffenen Folgerungen gelten demnach auch für den hier behandelten Fall. Die Gl. (37) zeitigt folgende Ergebnisse:

A. Einseitig eingespannter Träger, $\psi = \left(\frac{l}{l_1} \right)^3$:

a) $\frac{l_1}{l} = 0.78$: $\mu \cong 0.51$ für einen Bereich $0 < A < 1.5$,

b) $\frac{l_1}{l} = 1$: $\mu \cong 0.24$ für einen Bereich $0 < A < 1.2$.

B. Beidseitig frei aufliegender Träger, $\psi = \frac{1}{\left(\frac{l_1}{l} \right)^2 \left(1 - \frac{l_1}{l} \right)^2}$.

a) $\frac{l_1}{l} = 0.78$: $\mu \cong 0.9$ für einen Bereich $0 < A < 0.4$,

b) $\frac{l_1}{l} = \frac{1}{2}$: $\mu \cong 0.49$ für einen Bereich $0 < A < 1$.

Die starke Abhängigkeit der Ziffer μ vom Verhältnis $\frac{l_1}{l}$ und der zum Teil sehr kleine Bereich von Λ , für den $\mu = \text{konst.}$ gilt, stellen sich der Anwendung dieser Näherungsrechnung hindernd entgegen. Im folgenden wird daher noch eine aus der strengen Lösung abgeleitete Näherungsgleichung für Ω entwickelt, die für die Berechnung des kleinsten Ω -Wertes völlig ausreicht.

Nach Gl. (16) ist $g_1(\Lambda)$ gegeben durch

$$g_1(\Lambda) = \Lambda^2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\zeta_v^2(l_1)}{\varrho_v^2 - \Lambda^2}.$$

Nimmt man von der Summe nur das erste Glied und vernachlässigt in den folgenden Summanden Λ^2 gegen ϱ_v^2 , so ergibt sich

$$g_1(\Lambda) = \Lambda^2 \left[\frac{\zeta_1^2(l_1)}{1 - \Lambda^2} + \sum_{v=2}^{\infty} \frac{\zeta_v^2(l_1)}{\varrho_v^2} \right].$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (23a) und $\varrho_v^2 = \frac{\lambda_v^4}{\lambda_1^4}$ wird

$$\sum_{v=2}^{\infty} \frac{\zeta_v^2(l_1)}{\varrho_v^2} = \lambda_1^4 K_{11} - \zeta_1^2(l_1),$$

womit

$$g_1(\Lambda) = \Lambda^2 \left[\zeta_1^2(l_1) \frac{\Lambda^2}{1 - \Lambda^2} + \lambda_1^4 K_{11} \right]. \quad (38)$$

Die prozentualen Abweichungen dieser aus Gl. (38) gerechneten Werte von den bekannten genauen Werten erreicht im Bereiche $0 < \Lambda < 1$ kaum 0.5%.

Setzt man den Wert $g_1(\Lambda)$ nach (38) in die Gl. (8b) ein und berechnet daraus Λ^2 , so ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\Lambda^2 = C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - C_2}. \quad (39)$$

Darin bedeuten

$$2C_1 = \frac{3 \frac{c}{c_b} \left[\frac{1}{\alpha \lambda_1^4} + K_{11} \right] + 1}{N}, \quad C_2 = 3 \frac{c}{c_b} \frac{1}{\alpha \lambda_1^4 N}$$

und

$$N = \frac{c}{c_b} \left[3 K_{11} - \frac{3 \zeta_1^2(l_1)}{\lambda_1^4} \right] + 1.$$

Nach (25a) ergibt sich daraus speziell für den Kragträger:

$$\left. \begin{aligned} 2C_1 &= \frac{1}{N} \left[\frac{c}{c_b} \left(\frac{0.24267}{\alpha} + \frac{l_1^3}{l^3} \right) + 1 \right], \quad C_2 = \frac{1}{N} \frac{c}{c_b} \frac{0.24267}{\alpha}, \\ N &= \frac{c}{c_b} \left[\left(\frac{l_1}{l} \right)^3 - 0.24267 \zeta_1^2(l_1) \right] + 1 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

und mit (26a) für den an den Enden frei aufliegenden Träger:

$$\left. \begin{aligned} 2C_1 &= \frac{1}{N} \left\{ \frac{c}{c_b} \left[\frac{3}{\alpha \pi^4} + \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 \left(1 - \frac{l_1}{l} \right)^2 \right] + 1 \right\}, \quad C_2 = \frac{1}{N} \frac{c}{c_b} \frac{3}{\alpha \pi^4}, \\ N &= \frac{c}{c_b} \left[\left(\frac{l_1}{l} \right)^2 \left(1 - \frac{l_1}{l} \right)^2 - \frac{6}{\pi^4} \sin^2 \pi \frac{l_1}{l} \right] + 1. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Da die kleinsten Werte für die Eigenschwingzahlen Λ kleiner als 1 sind, werden sie mit großer Genauigkeit durch die obige Näherungsformel (39) wiedergegeben. Aber auch die größere der beiden Wurzeln von (39) gibt eine brauchbare Näherung, wenn Λ unter 2 bleibt.

Erzwungene Schwingungen.

Wirkt an einer Stelle l_2 des Trägers eine erregende periodische Kraft $P = P_0 \sin n t$ (Abb. 1), so tritt an Stelle der Null in Gl. (3a) die der Koordinate p_k entsprechende generalisierte Kraft. Da

$$y(x, t) = \sum_{v=1}^{\infty} z_v(x) p_v(t),$$

so ist die Änderung von y bei Änderung der Koordinate p_k :

$$\delta y(x, t) = z_k(x) \delta p_k(t).$$

Die von der erregenden Kraft P an der Stelle $y(l_2, t)$ bei dieser Änderung geleistete Arbeit ist

$$P \delta y(l_2, t) = P_0 \sin n t z_k(l_2) \delta p_k(t),$$

demnach die generalisierte Kraft

$$P_0 \sin n t z_k(l_2).$$

Die Gleichungen für die erzwungenen Schwingungen des zusammengesetzten Systems sind nun

$$\ddot{p}_k + p_k \omega_k^2 - c y z_k(l_1) + c z_k(l_1) \sum_{v=1}^{\infty} z_v(l_1) p_v = P_0 z_k(l_2) \sin n t \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (42a)$$

$$\ddot{\eta} + \gamma^2 \eta - \gamma^2 \sum_{v=1}^{\infty} z_v(l_1) p_v = 0. \quad (42b)$$

Nach Elimination von η entsteht das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\ddot{p}_k + \ddot{p}_k (\omega_k^2 + \gamma^2) + c z_k(l_1) \sum_{v=1}^{\infty} z_v(l_1) \ddot{p}_v + \gamma^2 \omega_k^2 p_k = P_0 z_k(l_2) (\gamma^2 - n^2) \sin n t \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (43)$$

Die nach Abklingen der freien Schwingungen übrigbleibenden erzwungenen Schwingungen ergeben sich durch die Kenntnis der partikulären Lösungen dieses Systems von inhomogenen Differentialgleichungen. Die Einführung des Ansatzes

$$p_k(t) = a_k \sin n t \quad (44)$$

in (43) ergibt für die a_k das Gleichungssystem

$$a_k (\gamma^2 - n^2) (\omega_k^2 - n^2) - n^2 c z_k(l_1) \sum_v z_v(l_1) a_v = P_0 z_k(l_2) (\gamma^2 - n^2) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

oder

$$a_k - \frac{c z_k(l_1) n^2}{(\gamma^2 - n^2) (\omega_k^2 - n^2)} \sum_v z_v(l_1) a_v = \frac{P_0 z_k(l_2)}{\omega_k^2 - n^2} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (45)$$

Multipliziert man diese Gleichungen jeweils mit $z_k(l_1)$ ($k = 1, 2, \dots$) und summiert über alle Gleichungen, so entsteht

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k(l_1) a_k - \frac{c n^2}{\gamma^2 - n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k^2(l_1)}{\omega_k^2 - n^2} \sum_{v=1}^{\infty} z_v(l_1) a_v = P_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k(l_1) z_k(l_2)}{\omega_k^2 - n^2},$$

oder nach Änderung des Summationszeichens im ersten Gliede:

$$\sum_v a_v z_v(l_1) \left[1 - \frac{c n^2}{\gamma^2 - n^2} \sum_k \frac{z_k^2(l_1)}{\omega_k^2 - n^2} \right] = P_0 \sum_k \frac{z_k(l_1) z_k(l_2)}{\omega_k^2 - n^2}. \quad (46)$$

Bezeichnet man den in der eckigen Klammer stehenden Ausdruck mit Δ , also

$$\Delta = 1 - \frac{c n^2}{\gamma^2 - n^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{z_v^2(l_1)}{\omega_v^2 - n^2}, \quad (47)$$

so schreibt sich Gl. (46)

$$\sum_v a_v z_v(l_1) = \frac{P_0}{\Delta} \sum_k \frac{z_k(l_1) z_k(l_2)}{\omega_k^2 - n^2}. \quad (46a)$$

Ersetzt man die Summe in Gl. (45) durch (46a), dann ergibt sich

$$a_k = \frac{c n^2}{\gamma^2 - n^2} \frac{z_k(l_1)}{\omega_k^2 - n^2} \frac{P_0}{\Delta} \sum_v \frac{z_v(l_1) z_v(l_2)}{\omega_v^2 - n^2} = \frac{P_0 z_k(l_2)}{\omega_k^2 - n^2} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

oder schließlich

$$a_k = \frac{P_0}{\omega_k^2 - n^2} \left[z_k(l_2) + \frac{c n^2}{\gamma^2 - n^2} \frac{z_k(l_1)}{\Delta} \sum_v \frac{z_v(l_1) z_v(l_2)}{\omega_v^2 - n^2} \right]. \quad (48)$$

Nach (44) ist dann p_k gegeben durch $p_k = a_k \sin n t$, worin a_k nach Gl. (48) bestimmt ist.

Aus Gl. (42a) folgt

$$c \eta z_k(l_1) = \ddot{p}_k + p_k \omega_k^2 + c z_k(l_1) \sum_v z_v(l_1) p_v - P_0 z_k(l_2) \sin n t \quad (k = 1, 2, \dots)$$

und daraus mit Benützung des obigen Wertes für p_k und einiger Umformung bei Beachtung von (47):

$$\eta = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - n^2} \frac{P_0}{\Delta} \sin n t \sum_v \frac{z_v(l_1) z_v(l_2)}{\omega_v^2 - n^2}. \quad (49)$$

Für

$$y(x, t) = \sum_v z_v(x) p_v(t)$$

erhält man

$$y(x, t) = P_0 \sin n t \sum_v \frac{z_v(x)}{\omega_v^2 - n^2} \left[z_v(l_2) + \frac{c n^2}{\gamma^2 - n^2} \frac{z_v(l_1)}{\Delta} \sum_k \frac{z_k(l_1) z_k(l_2)}{\omega_k^2 - n^2} \right]. \quad (50)$$

Setzt man wieder, um dimensionslose Größen einzuführen,

$$z_k(x) = \frac{\zeta_k(x)}{\sqrt{m}}, \quad \alpha = \frac{M}{m},$$

so wird nach (47)

$$\Delta = 1 - \frac{\alpha}{1 - \frac{n^2}{\gamma^2}} \frac{n^2}{\omega_1^2} \sum_k \frac{\zeta_k^2(l_1)}{\left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{n}{\omega_1}\right)^2},$$

oder mit Verwendung der nach (16) definierten Größe $g_1\left(\frac{n}{\omega_1}\right)$:

$$\Delta = 1 - \frac{\alpha}{1 - \frac{n^2}{\gamma^2}} g_1\left(\frac{n}{\omega_1}\right). \quad (47a)$$

Für η [Gl. (49)] folgt

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{n^2}{\gamma^2}} \frac{P_0}{\Delta} \sin n t \frac{1}{m n^2} \frac{n^2}{\omega_1^2} \sum_v \frac{\zeta_v(l_1) \zeta_v(l_2)}{\left(\frac{\omega_v}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{n}{\omega_1}\right)^2}.$$

Es empfiehlt sich, entsprechend g_1 eine Größe g_2 einzuführen gemäß der Definition

$$g_2\left(\frac{n}{\omega_1}\right) = \frac{n^2}{\omega_1^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\zeta_v(l_1) \zeta_v(l_2)}{\left(\frac{\omega_v}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{n}{\omega_1}\right)^2}. \quad (51)$$

Faßt man noch das Produkt $\left(1 - \frac{n^2}{\gamma^2}\right) \Delta$ zusammen und bezeichnet es mit δ , so ist dieses nach Gl. (47a) gegeben durch

$$\delta = 1 - \frac{n^2}{\gamma^2} - \alpha g_1\left(\frac{n}{\omega_1}\right). \quad (52)$$

Mit $g_2\left(\frac{n}{\omega_1}\right)$ und δ lauten die Gleichungen für η und $y(x, t)$:

$$\eta(t) = \frac{P_0}{m n^2} \frac{g_2\left(\frac{n}{\omega_1}\right)}{\delta} \sin n t, \quad (53)$$

$$y(x, t) = \frac{P_0}{m \omega_1^2} \sin n t \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\zeta_v(x)}{\omega_v^2 - \left(\frac{n}{\omega_1}\right)^2} \left[\zeta_v(l_2) + \alpha \zeta_v(l_1) \frac{g_2\left(\frac{n}{\omega_1}\right)}{\delta} \right]. \quad (54)$$

Zur leichteren Orientierung werden die in den beiden Gleichungen für $\eta(t)$ und $y(x, t)$ vorkommenden Größen zusammengestellt:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{M}{m}, & \gamma^2 &= \frac{c}{M}, & \delta &= 1 - \frac{n^2}{\gamma^2} - \alpha g_1\left(\frac{n}{\omega_1}\right), \\ g_1\left(\frac{n}{\omega_1}\right) &= \left(\frac{n}{\omega_1}\right)^2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\zeta_v^2(l_1)}{\left(\frac{\omega_v}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{n}{\omega_1}\right)^2}, & g_2\left(\frac{n}{\omega_1}\right) &= \left(\frac{n}{\omega_1}\right)^2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\zeta_v(l_1) \zeta_v(l_2)}{\left(\frac{\omega_v}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{n}{\omega_1}\right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Wird $\delta = 0$ bei nicht verschwindendem $g_2\left(\frac{n}{\omega_1}\right)$, so werden sowohl η als auch $y(x, t)$ unendlich groß. Es ist dies eine Stelle der Resonanz.

Nach (52) bedeutet $\delta = 0$:

$$1 - \frac{n^2}{\gamma^2} = \alpha g_1\left(\frac{n}{\omega_1}\right),$$

das heißt n fällt mit einer der Eigenschwingungszahlen Ω des zusammengesetzten Systems zusammen [vgl. Gl. (8a)]. Die Fälle $n = \omega_\sigma$ (Fall D) und $n = \gamma$ (Fall E) werden später gesondert untersucht.

Sonderfälle.

A. Die Kreisfrequenz n der erregenden Kraft sei sehr klein ($n \rightarrow 0$).

Die erregende Kraft ändert sich dann nur sehr langsam. Da in Gl. (51) $\left(\frac{n}{\omega_1}\right)^2$ gegen $\left(\frac{\omega_v}{\omega_1}\right)^2$ gestrichen werden kann, so wird

$$\frac{\alpha g_2\left(\frac{n}{\omega_1}\right)}{\delta} = \frac{\alpha n^2 \sum_v \frac{\zeta_v(l_1) \zeta_v(l_2)}{\omega_v^2}}{1 - \frac{n^2}{\gamma^2} - \alpha n^2 \sum_v \frac{\zeta_v^2(l_1)}{\omega_v^2}} \cong 0$$

und Gl. (54) geht über in

$$y(x) = \frac{P}{m} \sum_v \frac{\zeta_v(x) \zeta_v(l_2)}{\omega_v^2},$$

wofür bei Beachtung von $\omega_v^2 = \frac{EJ}{m l^3} \lambda_v^4$ [Gl. (18) und (21)] und Benützung der „bilinearen Relation“ Gl. (23) geschrieben werden kann

$$y(x) = \frac{P l^3}{EJ} K\left(\frac{x}{l}, \frac{l_2}{l}\right).$$

$y(x)$ ist daher gleich der statischen Durchbiegung des Trägers an der Stelle x unter einer Last P , die im Punkte l_2 des Trägers wirkt. Da

$$\frac{g_2\left(\frac{n}{\omega_1}\right)}{\delta n^2} = K\left(\frac{l_1}{l}, \frac{l_2}{l}\right),$$

so ist nach (53)

$$\eta = \frac{P l^3}{E J} K\left(\frac{l_1}{l}, \frac{l_2}{l}\right) = y(l_1).$$

B. $M = 0$. Erzwungene Schwingungen des Trägers allein.

Dem Werte $M = 0$ entsprechen nach (55):

$$\alpha = 0, \quad \gamma^2 = \infty \quad \text{und} \quad \delta = 1.$$

Für η und y ergeben sich damit die folgenden Gleichungen:

$$\eta = \frac{P_0}{m n^2} \sin n t g_2 \left(\frac{n}{\omega_1} \right), \quad (53a)$$

$$y(x, t) = \frac{P_0}{m \omega_1^2} \sin n t \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\zeta_v(x) \zeta_v(l_2)}{\left(\frac{\omega_v}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{n}{\omega_1}\right)^2}. \quad (54a)$$

An der Stelle $x = l_1$ ist $y(l_1, t)$ gegeben durch

$$y(l_1, t) = \frac{P_0}{m n^2} \sin n t g_2 \left(\frac{n}{\omega_1} \right) = \eta(t).$$

B, a. $M = 0$. Der Träger von der Länge l sei an seinen Enden gestützt.

Eigenfunktionen und Eigenwerte sind gegeben durch

$$\zeta_k(x) = \sqrt{2} \sin k \pi \frac{x}{l},$$

$$\omega_k^2 = \frac{E J}{m l^3} \pi^4 k^4;$$

demgemäß ist nach (54a) und mit $a^2 = \frac{E J l}{m}$

$$y(x, t) = \frac{2 P_0 l^4}{m} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{v \pi x}{l} \sin \frac{v \pi l_2}{l}}{a^2 \pi^4 v^4 - n^2 l^4} \sin n t,$$

übereinstimmend mit der von S. Timoshenko³ [S. 265, Gl. (f)] gegebenen Formel.

C. $m = 0$. Der Träger wird als Feder ohne Masse betrachtet.

Der in Gl. (53) vorkommende Quotient $\frac{g_2}{m \delta}$ läßt sich gemäß den Definitionen (55) umformen in

$$\frac{g_2}{m \delta} = \frac{n^2 \sum_v \frac{\zeta_v(l_1) \zeta_v(l_2)}{m \omega_v^2 - m n^2}}{1 - \frac{n^2}{\gamma^2} - M n^2 \sum_v \frac{\zeta_v^2(l_1)}{m \omega_v^2 - m n^2}};$$

und da nach (18) und (21) $m \omega_v^2 = \frac{E J}{l^3} \lambda_v^4$, so wird für $m = 0$

$$\frac{g_2}{m \delta} = \frac{\frac{n^2 l^3}{E J} \sum_v \frac{\zeta_v(l_1) \zeta_v(l_2)}{\lambda_v^4}}{1 - \frac{n^2}{\gamma^2} - M \frac{n^2 l^3}{E J} \sum_v \frac{\zeta_v^2(l_1)}{\lambda_v^4}},$$

wofür sich mit Hilfe der Greenschen Einflußfunktion gemäß Gl. (23) schreiben läßt:

$$\frac{g_2}{m \delta} = \frac{n^2 K_{1,2}}{\frac{E J}{l^3} \left(1 - \frac{n^2}{\gamma^2}\right) - M n^2 K_{1,1}} \left[K_{1,2} \equiv K\left(\frac{l_1}{l}, \frac{l_2}{l}\right) \right]. \quad (a)$$

Nach (53) ist mit $\frac{g_2}{m \delta}$ nach (a)

$$\eta = P_0 \sin n t \frac{K_{1,2}}{\frac{EJ}{l^3} \left(1 - \frac{n^2}{\gamma^2}\right) - M n^2 K_{1,1}}. \quad (53b)$$

Da weiters $\alpha \frac{g_2}{\delta} = M \frac{g_2}{m \delta}$, so ist nach (54) bei Beachtung von Gl. (a)

$$y(x, t) = P_0 \sin n t \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\zeta_v(x)}{m \omega_v^2 - m n^2} \left[\zeta_v(l_2) + \frac{M n^2 K_{1,2}}{\frac{EJ}{l^3} \left(1 - \frac{n^2}{\gamma^2}\right) - M n^2 K_{1,1}} \zeta_v(l_1) \right];$$

für $m = 0$ folgt daraus

$$y(x, t) = \frac{P_0 l^3}{EJ} \sin n t \left[K\left(\frac{x}{l}, \frac{l_2}{l}\right) + \frac{K_{1,2}}{\frac{EJ}{M l^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right) - K_{1,1}} K\left(\frac{x}{l}, \frac{l_1}{l}\right) \right]. \quad (54b)$$

C, a. $l_2 = l_1$. Die erregende Kraft greift im Aufhängepunkt des Federpendels an.

Dann gelten die Gleichungen

$$\eta = P_0 \sin n t \frac{K_{11}}{\frac{EJ}{l^3} \left(1 - \frac{n^2}{\gamma^2}\right) - M n^2 K_{11}},$$

$$y(x, t) = P_0 \left(1 - \frac{n^2}{\gamma^2}\right) \sin n t \frac{K\left(\frac{x}{l}, \frac{l_1}{l}\right)}{\frac{EJ}{l^3} \left(1 - \frac{n^2}{\gamma^2}\right) - M n^2 K_{1,1}}.$$

An der Stelle $x = l_1$ ist

$$y(l_1, t) = \left(1 - \frac{n^2}{\gamma^2}\right) \eta(t).$$

Für einen Kragträger und für $l_2 = l_1$ ergeben sich mit den Ausdrücken (25) bzw. (25a):

$$\eta = \frac{P_0 \sin n t}{\frac{3 EJ}{l_1^3} \left(1 - \frac{n^2}{\gamma^2}\right) - M n^2},$$

$$y(x, t) = \frac{P_0}{2} \left(1 - \frac{n^2}{\gamma^2}\right) \frac{\left(\frac{x}{l_1}\right)^2 \left(3 - \frac{x}{l_1}\right)}{\frac{3 EJ}{l_1^3} \left(1 - \frac{n^2}{\gamma^2}\right) - M n^2} \sin n t.$$

Ist n sehr klein ($n \rightarrow 0$), so ergeben die vorstehenden Gleichungen die bekannten Formeln

$$\eta = \frac{P l_1^3}{3 EJ}, \quad y(x) = \frac{P l_1^3}{6 EJ} \left(\frac{x}{l_1}\right)^2 \left(3 - \frac{x}{l_1}\right).$$

D. $n = \omega_\sigma$. Die Frequenz der erregenden Kraft stimmt überein mit einer der Frequenzen der Eigenschwingungen des Trägers.

Da für $n = \omega_\sigma$ sowohl $g_1\left(\frac{\omega_\sigma}{\omega_1}\right)$, $g_2\left(\frac{\omega_\sigma}{\omega_1}\right)$ als auch δ gegen Unendlich gehen, muß hier ein Grenzübergang gemacht werden. Es werden vorübergehend folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\Gamma_v \equiv \left(\frac{\omega_v}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega_\sigma}{\omega_1}\right)^2, \quad \zeta_v(l_1) \equiv \bar{\zeta}_v, \quad \zeta_v(l_2) \equiv \bar{\bar{\zeta}}_v.$$

Für $v = \sigma$ wird $\Gamma_\sigma = 0$.

Für den in Gl. (53) auftretenden Quotienten $\frac{g_2\left(\frac{n}{\omega_1}\right)}{\delta}$ ergibt sich für $n = \omega_\sigma$:

$$\frac{g_2\left(\frac{\omega_\sigma}{\omega_1}\right)}{\delta} = \frac{\left(\frac{\omega_\sigma}{\omega_1}\right)^2 \sum_v \frac{\bar{\zeta}_v \bar{\zeta}_v}{\Gamma_v}}{1 - \frac{\omega_\sigma^2}{\gamma^2} - \alpha \left(\frac{\omega_\sigma}{\omega_1}\right)^2 \sum_v \frac{\bar{\zeta}_v^2}{\Gamma_v}}.$$

Nach Multiplikation von Zähler und Nenner mit Γ_σ folgt daraus

$$\frac{g_2\left(\frac{\omega_\sigma}{\omega_1}\right)}{\delta} = \frac{\left(\frac{\omega_\sigma}{\omega_1}\right)^2 \left[\sum_{v(v \neq \sigma)} \bar{\zeta}_v \bar{\zeta}_v \frac{\Gamma_\sigma}{\Gamma_v} + \bar{\zeta}_\sigma \bar{\zeta}_\sigma \right]}{\Gamma_\sigma \left(1 - \frac{\omega_\sigma^2}{\gamma^2}\right) - \alpha \left(\frac{\omega_\sigma}{\omega_1}\right)^2 \left[\sum_{v(v \neq \sigma)} \bar{\zeta}_v^2 \frac{\Gamma_\sigma}{\Gamma_v} + \bar{\zeta}_\sigma^2 \right]}$$

und für $\Gamma_\sigma = 0$:

$$\frac{g_2\left(\frac{\omega_\sigma}{\omega_1}\right)}{\delta} = - \frac{\bar{\zeta}_\sigma}{\alpha \bar{\zeta}_\sigma}. \quad (a)$$

Damit wird nach (53)

$$\eta(t) = - \frac{P_0}{M \omega_\sigma^2} \sin \omega_\sigma t \frac{\bar{\zeta}_\sigma(l_2)}{\bar{\zeta}_\sigma(l_1)}. \quad (53c)$$

Nach Gl. (54) wird weiters für $n = \omega_\sigma$:

$$y(x, t) = \frac{P_0}{m \omega_1^2} \sin \omega_\sigma t \left[\sum_{v(v \neq \sigma)} \frac{\bar{\zeta}_v(x)}{\Gamma_v} \left(\bar{\zeta}_v + \alpha \frac{g_2}{\delta} \bar{\zeta}_v \right) + \bar{\zeta}_\sigma(x) \frac{\bar{\zeta}_\sigma \delta + \alpha \bar{\zeta}_\sigma g_2}{\delta \Gamma_\sigma} \right]. \quad (b)$$

Für die im zweiten Gliede in der eckigen Klammer stehende Summe findet man

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_\sigma \delta + \alpha \bar{\zeta}_\sigma g_2 &= \bar{\zeta}_\sigma \left(1 - \frac{\omega_\sigma^2}{\gamma^2}\right) - \alpha \bar{\zeta}_\sigma \left(\frac{\omega_\sigma}{\omega_1}\right)^2 \sum_k \frac{\bar{\zeta}_k^2}{\Gamma_k} + \alpha \bar{\zeta}_\sigma \left(\frac{\omega_\sigma}{\omega_1}\right)^2 \sum_k \frac{\bar{\zeta}_k \bar{\zeta}_k}{\Gamma_k} = \\ &= \bar{\zeta}_\sigma \left(1 - \frac{\omega_\sigma^2}{\gamma^2}\right) - \alpha \left(\frac{\omega_\sigma}{\omega_1}\right)^2 \sum_k \frac{\bar{\zeta}_k}{\Gamma_k} (\bar{\zeta}_\sigma \bar{\zeta}_k - \bar{\zeta}_\sigma \bar{\zeta}_k) = \\ &= \bar{\zeta}_\sigma \left(1 - \frac{\omega_\sigma^2}{\gamma^2}\right) - \alpha \left(\frac{\omega_\sigma}{\omega_1}\right)^2 \sum_{v(v \neq \sigma)} \frac{\bar{\zeta}_v}{\Gamma_v} (\bar{\zeta}_\sigma \bar{\zeta}_v - \bar{\zeta}_\sigma \bar{\zeta}_v). \end{aligned} \quad (c)$$

Weiters ist

$$\begin{aligned} \Gamma_v \delta &= \Gamma_v \left(1 - \frac{n^2}{\gamma^2}\right) - \alpha \left(\frac{n}{\omega_1}\right)^2 \sum_k \bar{\zeta}_k^2 \frac{\Gamma_v}{\Gamma_k} = \\ &= \Gamma_v \left(1 - \frac{n^2}{\gamma^2}\right) - \alpha \left(\frac{n}{\omega_1}\right)^2 \left[\sum_{k(k \neq v)} \bar{\zeta}_k^2 \frac{\Gamma_v}{\Gamma_k} + \bar{\zeta}_v^2 \right] \end{aligned}$$

und für $v = \sigma$, also $n = \omega_\sigma$, $\Gamma_\sigma = 0$:

$$\Gamma_\sigma \delta = - \alpha \left(\frac{\omega_\sigma}{\omega_1}\right)^2 \bar{\zeta}_\sigma^2. \quad (d)$$

Setzt man die Gl. (a), (c) und (d) in (b) ein, so erhält man

$$y(x, t) = \frac{P_0}{m \omega_1^2} \sin \omega_\sigma t \left\{ \sum_{\substack{v=1 \\ (v \neq \sigma)}}^{\infty} \frac{\zeta_v(x)}{\Gamma_v \zeta_\sigma} (\bar{\zeta}_v \bar{\zeta}_\sigma - \bar{\zeta}_v \bar{\zeta}_\sigma) - \right. \\ \left. - \frac{\zeta_\sigma(x)}{\alpha \bar{\zeta}_\sigma^2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_\sigma} \right)^2 \left[\bar{\zeta}_\sigma \left(1 - \frac{\omega_\sigma^2}{\gamma^2} \right) - \alpha \left(\frac{\omega_\sigma}{\omega_1} \right)^2 \sum_{\substack{v=1 \\ (v \neq \sigma)}}^{\infty} \frac{\bar{\zeta}_v}{\Gamma_v} (\bar{\zeta}_\sigma \bar{\zeta}_v - \bar{\zeta}_\sigma \bar{\zeta}_v) \right] \right\},$$

oder schließlich

$$y(x, t) = \frac{P_0 \sin \omega_\sigma t}{m \omega_1^2 \bar{\zeta}_\sigma^2(l_1)} \left\{ \sum_{\substack{v=1 \\ (v \neq \sigma)}}^{\infty} \frac{[\zeta_v(x) \zeta_\sigma(l_1) - \zeta_v(l_1) \zeta_\sigma(x)] [\zeta_\sigma(l_1) \zeta_v(l_2) - \zeta_\sigma(l_2) \zeta_v(l_1)]}{\left(\frac{\omega_v}{\omega_1} \right)^2 - \left(\frac{\omega_\sigma}{\omega_1} \right)^2} - \right. \\ \left. - \frac{\zeta_\sigma(x) \zeta_\sigma(l_2)}{\alpha} \left(\frac{\omega_1}{\omega_\sigma} \right)^2 \left(1 - \frac{\omega_\sigma^2}{\gamma^2} \right) \right\}. \quad (54c)$$

Hängt das Federpendel gerade in einem Knotenpunkt der $(\sigma + 1)$ -Oberschwingung des Trägers, so wird $\zeta_\sigma(l_1) = 0$ und η als auch y wachsen über alle Grenzen, wenn die Frequenz der erregenden Kraft gerade übereinstimmt mit der Eigenfrequenz ω_σ .

An der Stelle $x = l_1$, also im Aufhängepunkt der Feder, wird nach (54c)

$$y(l_1, t) = - \frac{P_0 \sin \omega_\sigma t}{M \omega_\sigma^2} \frac{\zeta_\sigma(l_2)}{\zeta_\sigma(l_1)} \left(1 - \frac{\omega_\sigma^2}{\gamma^2} \right) = \eta \left(1 - \frac{\omega_\sigma^2}{\gamma^2} \right).$$

D, a. $n = \omega_\sigma$, $l_2 = l_1$. Hier fallen Aufhängepunkt der Feder und Angriffspunkt der erregenden Kraft zusammen.

Gl. (53c) und (54c) ergeben

$$\eta = - \frac{P_0}{M \omega_\sigma^2} \sin \omega_\sigma t, \\ y(x, t) = - \frac{P_0 \sin \omega_\sigma t}{m \omega_1^2 \bar{\zeta}_\sigma^2(l_1)} \frac{\zeta_\sigma(x) \zeta_\sigma(l_1)}{\alpha} \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_\sigma^2} - \frac{\omega_1^2}{\gamma^2} \right) \\ = - \frac{P_0}{M \omega_\sigma^2} \frac{\zeta_\sigma(x)}{\zeta_\sigma(l_1)} \left(1 - \frac{\omega_\sigma^2}{\gamma^2} \right) \sin \omega_\sigma t.$$

An der Stelle $x = l_1$ wird demnach

$$y(l_1, t) = - \frac{P_0}{M \omega_\sigma^2} \left(1 - \frac{\omega_\sigma^2}{\gamma^2} \right) \sin \omega_\sigma t.$$

E. $n = \gamma = \sqrt{\frac{c}{M}}$. Die Frequenz der erregenden Kraft ist gleich der Eigenfrequenz des Federpendels.

Gemäß Gl. (52) ist hier

$$\delta = - \alpha g_1 \left(\frac{\gamma}{\omega_1} \right).$$

Damit werden

$$\eta = - \frac{P_0}{c} \sin \gamma t \frac{g_2 \left(\frac{\gamma}{\omega_1} \right)}{g_1 \left(\frac{\gamma}{\omega_1} \right)}, \quad (53d)$$

$$y(x, t) = \frac{P_0 \sin \gamma t}{m \omega_1^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\zeta_v(x)}{\varrho_v^2 - \left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right)^2} \left[\zeta_v(l_2) - \zeta_v(l_1) \frac{g_2\left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right)}{g_1\left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right)} \right]. \quad (54d)$$

An der Stelle $x = l_1$, wo das Federpendel am Träger sitzt, wird

$$\begin{aligned} y(l_1, t) &= \frac{P_0 \sin \gamma t}{m \omega_1^2} \sum_v \frac{\zeta_v(l_1)}{\varrho_v^2 - \left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right)^2} \left[\zeta_v(l_2) - \zeta_v(l_1) \frac{g_2\left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right)}{g_1\left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right)} \right] = \\ &= \frac{P_0 \sin \gamma t}{m \gamma^2} \left[g_2\left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right) - g_1\left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right) \frac{g_2\left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right)}{g_1\left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right)} \right] = 0. \end{aligned}$$

Will man also an irgendeiner Stelle l_1 eines Trägers die durch eine an der Stelle l_2 wirkende Kraft von der Frequenz n hervorgerufenen erzwungenen Schwingungen beseitigen, so wähle man eine Feder von der Federstärke $c \left[\frac{\text{kp}}{\text{cm}} \right]$ und eine Masse M so, daß $\sqrt{\frac{c}{M}} = n$ und bringe an der Stelle l_1 dieses Federpendel an.

Wie bei allen dynamischen Schwingungsdämpfern ist auch hier nur dann ein Erfolg zu erwarten, wenn die Frequenz n der störenden Kraft konstant oder nahezu konstant ist.

Der Schwingungsausschlag an der Stelle l_2 der erregenden Kraft ist dann

$$y(l_2, t) = \frac{\alpha P_0}{c} \sin \gamma t \left[g_3\left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right) - \frac{g_2^2\left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right)}{g_1\left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right)} \right]$$

mit

$$g_3\left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right) = \left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_k^2(l_2)}{\varrho_k^2 - \left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right)^2}.$$

(Eingegangen am 20. Januar 1953.)

Die Festigkeit von radial beschauften Laufrädern.

Von F. Jaburek, Graz.

Mit 14 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Für die Berechnung des Spannungs- und Verformungszustandes von radial beschauften Laufrädern, die mit extrem hohen Drehzahlen bis zu 30000 U/min. in Ladergebläsen von Flugzeugmotoren u. a. laufen, kann die beschauftete Scheibe angenähert als eine orthogonal anisotrope, kreisrunde Platte aufgefaßt werden. Ihr Spannungszustand zufolge der Fliehkraft ergibt sich als eine Superposition von quasiebenen Spannungen und überlagerten Biegespannungen. Die Differentialgleichungen für die entsprechenden Verschiebungen können für beliebige Radformen mit Hilfe der Differenzenrechnung gelöst werden.

Für die Berechnung des geschlossenen Laufrades mit Deckring wird für den letzteren ein Berechnungsverfahren der Ringtheorie nach E. Tschegg angewendet. Die statisch unbestimmte Aufgabe wird sodann durch Zusammenfügen des Deckringes mit der beschauften Scheibe gelöst. Für die geteilte Bauart eines solchen Laders genügt die Zusammenpassung des Deckringes mit seinen Rippen, während das Laufrad getrennt berechnet werden kann. Der Verlauf der Spannungen und Verformungen einzelner Modelle wird in dimensionsloser Form angegeben.

Summary. For calculating the condition of strains and deformation in radially bladed runners of boosters or charging blowers of aircraft engines, and the like, rotating at tremendous speeds of up to 30 000 RPM, the bladed disc may approximately be conceived as an orthogonal, anisotropic, circular plate. The condition of strain of this plate, caused by centrifugal forces, is the result of the superimposition of virtually plain strains and superimposed bending strains. The differential equations for the corresponding displacements concerning runners of any shape can readily be solved by means of the differential calculus.

For the calculation of the closed runner with cover ring a method of calculation according to the ring theory of E. Tschech is applied to the latter. The statically indetermined problem is then solved by joining the cover ring to the bladed disc. For the divided type, also used in such boosters, it is sufficient to assemble the cover ring with its ribs or fins, whereas the runner can be calculated separately. The evolution of the strains and deformations is indicated in the dimensionless shape.

Résumé. En vue du calcul des conditions de tension et de déformation dans les rotors à aubes radiales des surcompresseurs à soufflerie pour moteurs d'avion tournant avec une vitesse inouïe de jusqu'à 30 000 tours par minute, le disque à aubes peut être conçu approximativement comme une plaque ronde, orthogonale, anisotrope. Son état de tension à titre de conséquence de la force centrifuge est le résultat d'une superposition de tensions quasi-planes et de tensions de flexion superposées. Il est possible de résoudre à l'aide du calcul différentiel les équations différentielles concernant les déplacements respectifs pour toutes sortes de formes de rotors.

Pour le calcul du rotor clos à anneau de couverture on emploie pour l'anneau le mode de calcul selon la théorie d'anneau de E. Tschech. Puis ce problème statiquement indéterminé est résolu en joignant l'anneau de couverture au disque à aubes. Quant à la construction en parties d'un surcompresseur de ce genre il suffit de réunir l'anneau de couverture avec ses nervures, tandis que le rotor sera calculé séparément. L'évolution des tensions et des déformations de différents modèles est présentée sous une forme sans dimensions.

I. Einleitung.

Die Berechnung der Spannungen in rotierenden Laufrädern von Dampfturbinen und Gebläsen stellt eine Festigkeitsaufgabe dar, die eingehend nur unter Berücksichtigung der Verformungen, die unter der Fliehkraftwirkung auftreten, gelöst werden kann. Besonders bei kompliziert gebauten Rädern, wie es z. B. die beschauften Laufräder von Radialgebläsen der Flugzeugmotoren sind, ist für die genaue Berechnung des Fliehkraftspannungszustandes eine recht umfangreiche Rechenarbeit notwendig, die aber zufolge der extrem hohen Drehzahlen von 20 000 bis 28 000 U/min. und des kleinen Spieles gegen die Gehäusewände oft nicht zu vermeiden ist.

Für die angenäherte Berechnung rotierender Laufräder gibt es eine Reihe von Verfahren, wie die nach Donath-Grammel¹ und Keller-Salzmänn², nach denen die Radial- und Umfangsspannungen, die unter der Wirkung der Fliehkraft in der Scheibe entstehen, ermittelt werden können. Die Massen von Schaufeln u. dgl. können in erster Annäherung auf die Scheibe aufgeteilt gedacht und so zumindest angenähert in ihrer Wirkung auf den Spannungszustand berücksichtigt werden.

Für Laufräder von Flugzeugladern der üblichen Bauart, bestehend aus einer runden Scheibe aus Duralumin oder Stahl mit einer Anzahl von radialen Schaufeln („halboffene Bauart“), die durch einen Deckring verbunden sein können („ge-

¹ M. Donath: Die Berechnung rotierender Scheiben und Ringe, 2. Aufl. Berlin: Springer-Verlag. 1929. — R. Grammel: Ein neues Verfahren zur Berechnung rotierender Scheiben. Dingers polytechn. J. 338, 217 (1923). — Biczeno-Grammel: Technische Dynamik. Berlin: Springer-Verlag. 1939.

² C. Keller: Die Berechnung rotierender Radscheiben mittels konischer Teilringe. Escher Wyss Mitt. 5, 23 (1932); ferner Festschrift A. Stodola 1929 und Schweiz. Bau-Ztg. 99, 211 (1932). — F. Salzmänn: Kurvenscharen zur Berechnung rotierender Radscheiben mittels konischer Teilringe nach dem Verfahren von Keller. Escher Wyss Mitt. 11, 63 (1938).

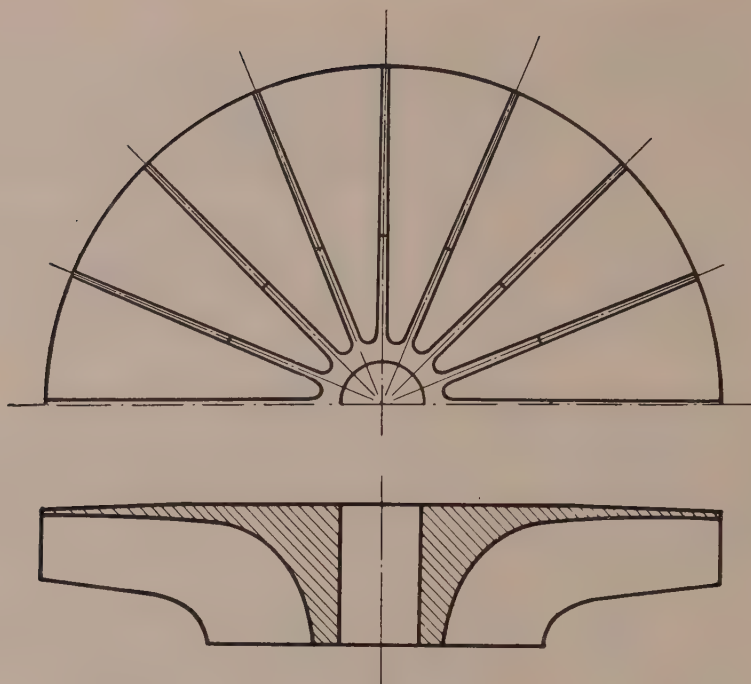


Abb. 1. Halboffenes Laufrad.

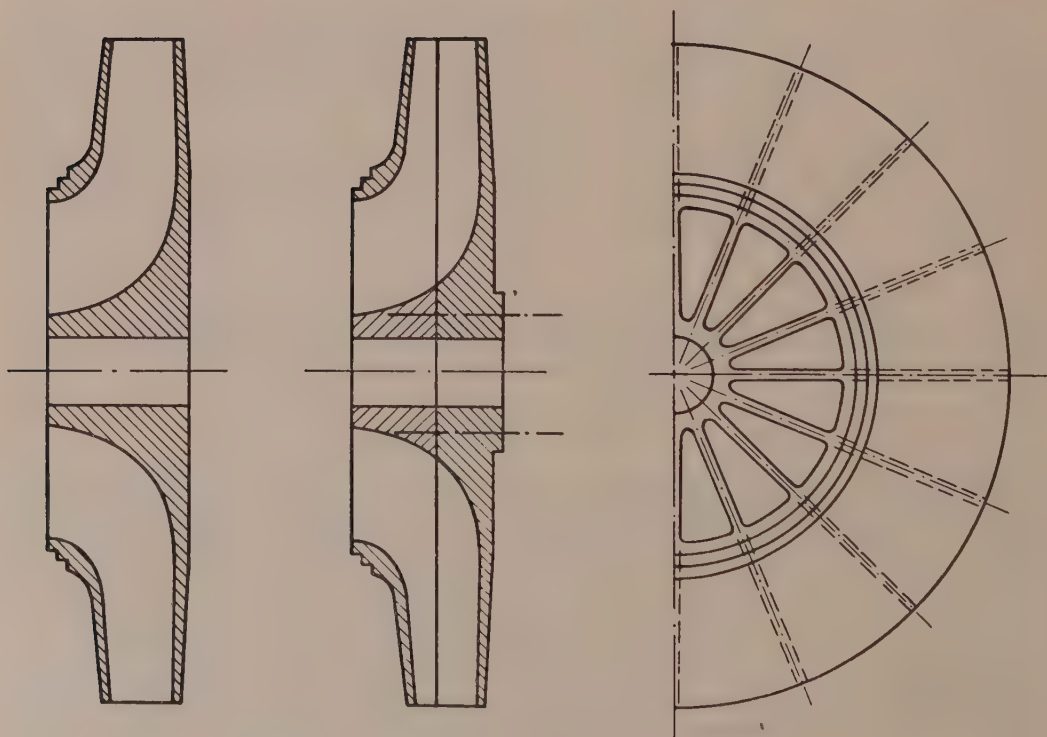


Abb. 2. Geschlossenes und geteiltes Laufrad.

geschlossene Bauart“), hat K. J. Müller³ in dieser Zeitschrift ein Berechnungsverfahren angegeben. Dieses erlaubt durch einen Reihenansatz die von den Rippen auf die Scheibe ausgeübten Kräfte in ihrem Verlaufe zu ermitteln und mit Hilfe der Zusammenpassung der verformten Teile das statisch unbestimmte Festigkeitsproblem zu lösen.

Im folgenden wird ein Berechnungsverfahren für dasselbe Problem mitgeteilt, das einen anderen Weg einschlägt und die mit Rippen versehene Scheibe als ein orthogonal anisotropes Gebilde auffaßt, dessen Beanspruchungen durch die Fliehkraft als Dehnungen und Biegungen erfaßt werden. Die allgemeinen Differentialgleichungen dieser Verformungen können für jede Radform mit Hilfe der Differenzenrechnung gelöst werden.

Für die Berechnung des Deckringes, der bei der „geteilten Bauart“ mit seinem Schaufelstern als eigener Teil auftritt, wird ein Berechnungsverfahren nach E. Tschschach angegeben, mit dessen Hilfe auch das geschlossene Laufrad berechnet werden kann.

II. Die Fliehkraftspannungen der rotierenden radial beschauften Scheibe.

Der Spannungszustand einer rotierenden Scheibe mit unsymmetrischem Profil läßt sich in zwei Teile zerlegen: Erstens in den Zustand gleichmäßiger radialer und tangentieller Dehnungen mit den zu diesem Verformungszustand gehörigen quasi-ebenen Spannungen (Mittelspannungen), die bei symmetrischen Laufrädern in der Regel allein betrachtet werden, und zweitens in einen überlagerten Biegezustand. Diese beiden Spannungszustände werden nun im folgenden einzeln behandelt.

a) Bei gleichmäßiger radialer Dehnung eines beschauften Laufrades müssen die Radialspannungen in den Schaufeln von solcher Größe sein, daß die Radialdehnungen der Schaufeln überall gleich groß der Radialdehnung der Scheibe sind. Da diese Radialdehnung der Scheibe von ihren Mittelspannungen σ_r und σ_φ abhängt und

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\varphi)$$

ist, wenn der Werkstoff einen Elastizitätsmodul E und eine Querdehnungsziffer ν besitzt, so muß in den Schaufeln eine Radialspannung σ_s von der Größe

$$\sigma_s = \sigma_r - \nu \sigma_\varphi$$

herrschen, um auch hier denselben Verlauf der Radialdehnung hervorzurufen.

Da es für die Betrachtung von in der Scheibenebene gleichmäßig verteilten radialen Kräften gleichgültig ist, wie die Querschnitte der Schaufeln am Umfang angebracht sind, können diese auf die Scheibe aufgelegt gedacht werden, so daß sich ein Modell ergibt, bei dem eine Scheibe von der Stärke $y(r)$ durch den Belag von der Dicke $\eta(r)$ verstärkt ist, der nur Radialspannungen von der Größe $\sigma_s = \sigma_r - \nu \sigma_\varphi$ zu übernehmen vermag. Bei k Rippen mit dem Querschnitt $F(r)$ ist

$$\eta(r) = \frac{k F(r)}{2 r \pi}.$$

Aus dem radialen Gleichgewicht am Element nach Abb. 3 ergibt sich die folgende Gleichgewichtsbedingung:

$$y \sigma_\varphi + \nu \frac{d}{dr} (r \eta \sigma_\varphi) = \frac{d}{dr} (r y \sigma_r) + \frac{d}{dr} (r \eta \sigma_r) + \mu r^2 \omega^2 \cdot (y + \eta). \quad (1)$$

Mit $\eta = 0$ geht diese Differentialgleichung in die Stodolasche Differentialgleichung

³ K. J. Müller: Die Festigkeit rein radial beschaufter Kreiselverdichter-Laufräder. Österr. Ingenieur-Arch. 2, Nr. 2, 138 (1948).

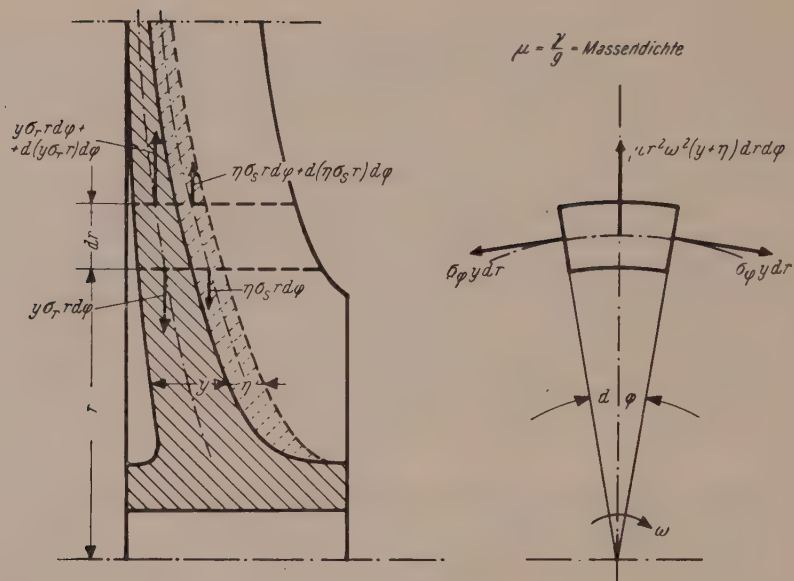


Abb. 3. Radiales Gleichgewicht der Fliehkraftwirkungen am halboffenen Laufrad.

für die unbeschauelte, rotierende Scheibe über. Werden die Spannungen σ_r und σ_φ in Gl. (1) durch die Radialverschiebung u ausgedrückt,

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right), \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right),\end{aligned}\quad (2)$$

so ergibt sich eine Differentialgleichung 2. Ordnung für u

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u}{dr^2} \left[1 + (1-\nu^2) \frac{\eta}{y} \right] + \frac{du}{dr} \left[\frac{1}{r} + \frac{y'}{y} + \frac{1-\nu^2}{y} \left(\frac{\eta}{r} + \eta' \right) \right] + \\ + \frac{u}{r} \left(\nu \frac{y'}{y} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1-\nu^2}{E} \mu r \omega^2 \left(1 + \frac{\eta}{y} \right) = 0\end{aligned}\quad (3)$$

oder

$$\alpha u'' + \beta u' + \gamma u + \delta = 0,$$

in der die vier Faktoren α , β , γ und δ für eine bestimmte Radform bekannte Funktionen des Radius sind.

$$\alpha = 1 + (1-\nu^2) \frac{\eta}{y},$$

$$\beta = \frac{1}{r} + \frac{y'}{y} + \frac{1-\nu^2}{y} \left(\frac{\eta}{r} + \eta' \right),$$

$$\gamma = \left(\nu \frac{y'}{y} - \frac{1}{r} \right) \frac{1}{r},$$

$$\delta = \frac{1-\nu^2}{E} \mu r \omega^2 \left(1 + \frac{\eta}{y} \right).$$

Diese Differentialgleichung (3) kann für einen beliebigen Verlauf von y und η mit Hilfe des Differenzenrechenverfahrens gelöst werden. Wird der Radius in gleiche Intervalle von der Größe Δ unterteilt, so ist für einen beliebigen Intervallpunkt m

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{\Delta^2},$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2\Delta}$$

und es ergibt sich für diesen Punkt aus der Differentialgleichung (3) eine Differenzengleichung

$$(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) \frac{\alpha_m}{\Delta^2} + (u_{m+1} - u_{m-1}) \frac{\beta_m}{2\Delta} + \gamma_m u_m + \delta_m = 0$$

oder umgeformt

$$u_{m+1} \left(\frac{\alpha_m}{\Delta^2} + \frac{\beta_m}{2\Delta} \right) - u_m \left(\frac{2\alpha_m}{\Delta^2} - \gamma_m \right) + u_{m-1} \left(\frac{\alpha_m}{\Delta^2} - \frac{\beta_m}{2\Delta} \right) + \delta_m = 0. \quad (4)$$

Wird diese Gleichung für alle Intervallpunkte aufgestellt, so erhält man zusammen mit den Randbedingungen, z. B. $\sigma_r = 0$ für den Innen- und Außenrand, die ebenfalls in Differenzen ausgedrückt werden müssen, ein System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten, das nach dem Gaußschen Algorithmus gelöst werden kann. Aus dem sich daraus ergebenden Verlauf der Radialverschiebung u kann der Verlauf der Spannungen nach Gl. (2) ohne weiteres ermittelt werden.

b) Für die Berechnung der Biegespannungen wird die Annahme getroffen, daß die Schwerpunktskreise der Axialschnitte die bereits berechnete Radialverschiebung u beibehalten und daß zylindrische Schnitte sich durch die Biegung in Kegel verformen, deren Erzeugende um ψ gegen die Achsenrichtung geneigt sind und auf der durch den Schwerpunktskreis gedachten Biegefläche senkrecht stehen. Die axiale Verschiebung der Biegefläche sei w . Um die in der Scheibe wirkenden Biegemomente zu erfassen, wird das Gleichgewicht an einem Element nach Abb. 4 betrachtet. Dabei

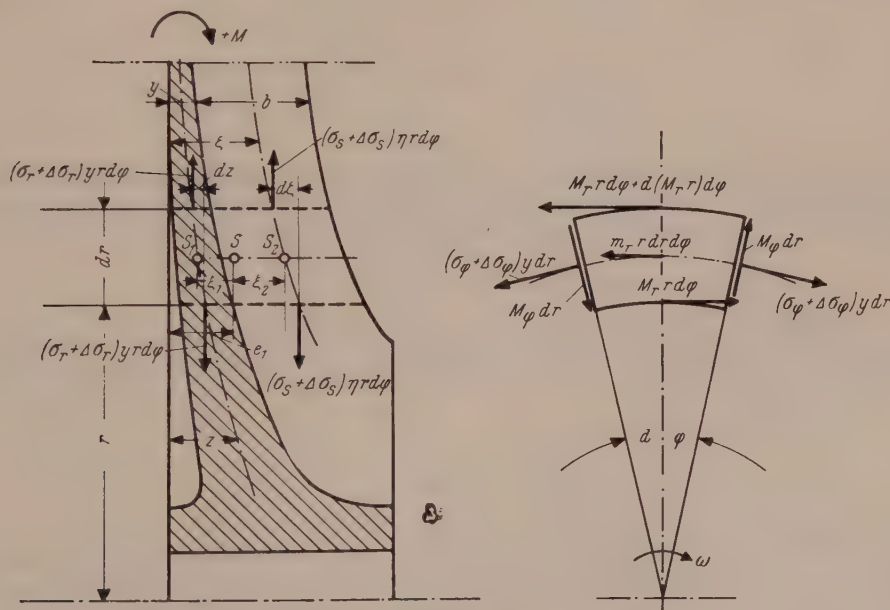


Abb. 4. Momentengleichgewicht am halboffenen Laufrad.

muß die versteifende Wirkung der Rippen gleichmäßig über den Umfang verteilt gedacht werden, etwa so, daß die Zahl der Rippen vervielfältigt und die Stärke in demselben Maße vermindert wird. Man erhält auf diese Art eine orthotrope Scheibe, deren Biegesteifigkeit in radialer Richtung größer ist als in Umfangsrichtung. Die letztere Biegesteifigkeit ist als

$$K_\varphi = \frac{E \cdot y^3}{12(1 - \nu^2)}$$

anzusetzen. Für die radiale Biegesteifigkeit ergibt sich im folgenden auf Grund

obiger Annahmen zwanglos ein aus der Steifigkeit der Scheibe und der Rippen zusammengesetzter Ausdruck.

An Hand des Elements nach Abb. 4 läßt sich das Gleichgewicht der Momente um die Tangentenrichtung zur Bestimmung der auftretenden Biegemomente untersuchen. Zu den bereits bekannten Spannungen σ_r , σ_φ , σ_s , die zum radialen Verschiebungszustand u gehören, treten Zusatzglieder $\Delta\sigma_r$, $\Delta\sigma_\varphi$ und $\Delta\sigma_s$ entsprechend den radialen Verschiebungen Δu der Biegung, die in jedem Zylinderschnitt mit dem Schwerpunktsabstand ξ linear zunehmen. Es ist $\Delta u = \xi \psi = \xi w'$.

Die Verzerrungen in radialer und tangentieller Richtung durch die Biegung sind in Punkt S_1 :

$$\varepsilon_r^b = \xi_1 w'' = \xi_1 \psi',$$

$$\varepsilon_\varphi^b = \xi_1 \frac{w'}{r} = \xi_1 \frac{\psi}{r},$$

wobei ξ_1 den Abstand des Punktes S_1 in Scheibenmitte vom Schwerpunkt S des Gesamtquerschnittes im Zylinderschnitt angibt. In Punkt S_2 tritt in den Schaufeln nur eine radiale Dehnung von der Größe

$$\varepsilon_s^b = -\xi_2 w'' = -\xi_2 \psi'$$

auf, wobei ξ_2 den Abstand des Schwerpunktes S_2 der Schaufelquerschnitte vom Gesamtschwerpunkt S angibt. Diese Dehnungen sind nach dem Hookeschen Gesetz von folgenden Spannungen begleitet:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r^b + \nu \varepsilon_\varphi^b) = \frac{E}{1-\nu^2} \xi_1 \left(\psi' + \nu \frac{\psi}{r} \right), \\ \Delta\sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi^b + \nu \varepsilon_r^b) = \frac{E}{1-\nu^2} \xi_1 \left(\frac{\psi}{r} + \nu \psi' \right), \\ \Delta\sigma_s &= -E \xi_2 \psi'.\end{aligned}\tag{5}$$

Werden die einzelnen, am Element nach Abb. 4 angreifenden Momente der Radial- und Umfangsspannungen summiert, so ergibt sich eine Momentenbelastung der Scheibe um die Tangentenrichtung je Flächeneinheit der Mittelfläche von der Größe

$$m_r = (\sigma_r + \Delta\sigma_r) y z' + (\sigma_s + \Delta\sigma_s) \eta \zeta' + (\sigma_\varphi + \Delta\sigma_\varphi) \frac{y \xi_1}{r}.\tag{6}$$

Wenn nun hier die Ausdrücke für $\Delta\sigma_r$, $\Delta\sigma_\varphi$ und $\Delta\sigma_s$ eingesetzt werden, so treten drei Glieder ein, die von ψ' und ψ abhängig sind und somit als unbekannt zu gelten haben. Der Ausdruck für m_r lautet nun:

$$\begin{aligned}-m_r &= \sigma_r y z' + \sigma_s \eta \zeta' + \sigma_\varphi y \frac{\xi_1}{r} + \psi' E \left[\frac{\xi_1 y}{1-\nu^2} \left(z' + \frac{\nu \xi_1}{r} \right) - \xi_2 \eta \zeta' \right] + \\ &+ \psi \frac{E}{1-\nu^2} \xi_1 y \left(\frac{\nu z'}{r} + \frac{\xi_1}{r^2} \right).\end{aligned}\tag{7}$$

Für eine Scheibe ohne Schaufeln geht mit $\eta = \xi_1 = \xi_2 = 0$ der Ausdruck für m_r in die Form $-m_r = \sigma_r \cdot y \cdot z'$ über, der für die Berechnung der Biegespannungen einer rotierenden unsymmetrischen Scheibe ohne Rippen verwendet werden kann.

Durch die Biegung entstehen radiale Biegespannungen in der Scheibe und in den Schaufeln von den Größen

$$\begin{aligned}\sigma_r^b &= \frac{E}{1-\nu^2} \xi \left(\psi' + \nu \frac{\psi}{r} \right), \\ \sigma_s^b &= E \xi \psi',\end{aligned}\tag{8}$$

die proportional dem Abstand ξ vom Schwerpunkt S sind. Die Momente dieser Spannungen um den Schwerpunktskreis sind durch die Integrale

$$M_{r1} = \int_{(F1)} \sigma_r^b \xi dF \quad \text{und} \quad M_{r2} = \int_{(F2)} \sigma_s^b \xi dF$$

über die Flächen F_1 der Scheibe und F_2 der Rippen je Zentimeter des Umfanges gegeben.

$$M_{r1} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\psi' + \nu \frac{\psi}{r} \right) \int_{(F1)} \xi^2 dF = \frac{E J_1}{1-\nu^2} \left(\psi' + \nu \frac{\psi}{r} \right),$$

$$M_{r2} = E \psi' \int_{(F2)} \xi^2 dF = E J_2 \psi'.$$

Das radiale Biegemoment je Zentimeter des Umfanges besteht somit aus zwei mit der Biegesteifigkeit der Scheibe $K_1 = \frac{E J_1}{1-\nu^2}$ und der Balkensteifigkeit der Rippen $K_2 = E J_2$ behafteten Gliedern, wobei die Trägheitsmomente der Flächen J_1 und J_2 um den Schwerpunktskreis zu berechnen sind. Die Summe beider Steifigkeitszahlen kann als die radiale Biegesteifigkeit $K_r = K_1 + K_2 = \frac{E J_1}{1-\nu^2} + E J_2$ des beschauften Laufrades bezeichnet werden. Das radiale Biegemoment beträgt somit

$$M_r = K_1 \left(\psi' + \nu \frac{\psi}{r} \right) + K_2 \psi'. \quad (9)$$

Die Umfangsbiegung der Scheibe bewirkt außer der Veränderung der tangentiellen Mittelspannung $\Delta\sigma_\varphi$ noch ein Biegemoment M_φ je Zentimeter des Radius, dessen Größe durch die den Spannungen $(\sigma_\varphi + \Delta\sigma_\varphi)$ überlagerten Biegespannungen $\sigma_\varphi^b = \frac{E}{1-\nu^2} \xi_3 \left(\frac{\psi}{r} + \nu \psi' \right)$, die proportional dem Abstand ξ_3 von der Mittelfläche der Scheibe (von S_1) sind, gegeben ist.

$$M_\varphi = \int_{(F1)} \sigma_\varphi^b \xi_3 dF = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\psi}{r} + \nu \psi' \right) \int_{-y/2}^{+y/2} \xi_3^2 d\xi_3 = \frac{E y^3}{1-\nu^2} \left(\frac{\psi}{r} + \nu \psi' \right) = K_\varphi \left(\frac{\psi}{r} + \nu \psi' \right). \quad (10)$$

Nun kann das Gleichgewicht sämtlicher am Element nach Abb. 4 angreifenden Momente um die Tangentenrichtung angesetzt werden. Es ist:

$$d(M_r r) d\varphi - M_\varphi dr d\varphi + m_r r dr d\varphi = 0.$$

Daraus folgt:

$$\frac{d(M_r r)}{dr} - M_\varphi + r m_r = 0$$

und durch Einsetzen der Ausdrücke nach den Gl. (9), (10) und Umformung die Differentialgleichung für ψ

$$\psi'' + \psi' \left[\frac{1}{r} + \frac{\nu}{r} \frac{K_1}{K_r} + \frac{K_r'}{K_r} - \frac{\nu}{r} \frac{K_\varphi}{K_r} \right] + \psi \left[\frac{\nu}{r} \frac{K_1'}{K_r} + \frac{1}{r^2} \frac{K_\varphi}{K_r} \right] = -\frac{m_r}{K_r}. \quad (11)$$

Dies ist die Differentialgleichung der orthotropen Kreisplatte veränderlicher Stärke, die durch das Flächenmoment m_r auf Biegung beansprucht ist. Für die Platte ohne Rippen geht sie mit $K_2 = 0$, $K_1 = K_r = K_\varphi = \frac{E y^3}{12(1-\nu^2)}$ in die bekannte Differentialgleichung für Kreisplatten veränderlicher Stärke über.

Im vorliegenden Falle sind auch auf der rechten Seite für m_r nach Gl. (7) Ausdrücke, die mit ψ' und ψ behaftet sind, einzuführen, die den Charakter der streng linearen Differentialgleichung 2. Ordnung jedoch nicht verändern. Die vollständige Differentialgleichung lautet dann:

$$\psi'' K_r + \psi' \left[\frac{K_r}{r} + \frac{\nu}{r} K_1 + K_r' - \frac{\nu}{r} K_\varphi + \frac{E \xi_1 y}{1-\nu^2} \left(z' + \nu \frac{\xi_1}{r} \right) - E \xi_2 \eta \xi' \right] + \psi \left[\frac{\nu}{r} K_1' - \frac{K_\varphi}{r^2} + \frac{E}{1-\nu^2} \xi_1 y \left(\frac{\nu z'}{r} + \frac{\xi_1}{r^2} \right) \right] = \sigma_r y z' + \sigma_s \eta \xi' + \sigma_\varphi y \frac{\xi_1}{r}. \quad (12)$$

Da alle Funktionen von r im vorliegenden Falle des rotierenden Laufrades nur zahlenmäßig und graphisch erfaßbar und nicht analytisch ausdrückbar sind, kommt für die Lösung auch hier nur die Differenzenrechnung in Frage. Hierbei lauten die Randbedingungen, daß für den Anschluß an die unverformbar angenommene Nabe bei $r = r_i$ $\psi = 0$ und am Außenrand für $r = a$ das radiale Biegemoment $M_r = 0$ sein muß.

c) Zahlenbeispiel 1.

Die Durchrechnung der Spannungen für das in Abb. 5 dargestellte Laufrad hat den in Abb. 6 eingezeichneten Verlauf der dimensionslosen Spannungen $S = \frac{\sigma}{\mu a^2 \omega^2}$ ergeben. Dabei bedeutet $\mu = \frac{\gamma}{g}$ die Massendichte des Werkstoffes, a den Außenradius und ω die Winkelgeschwindigkeit des Laufrades. Die Höchst-

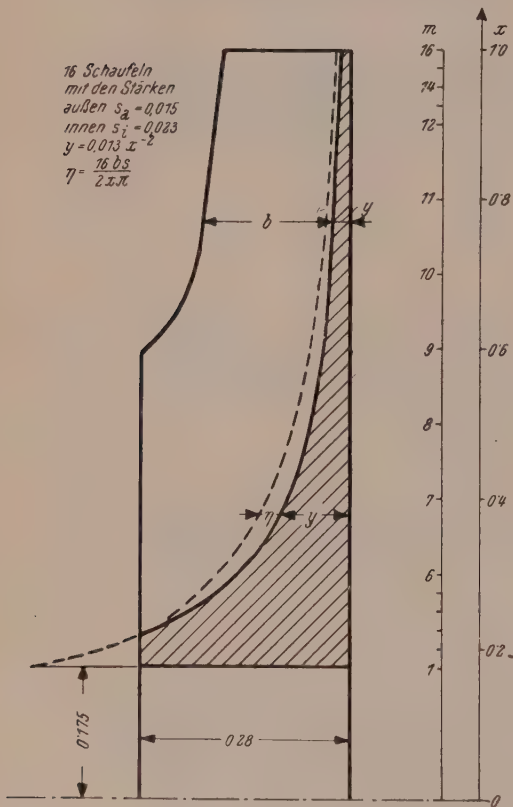


Abb. 5. Halboffenes Laufrad zu Rechenbeispiel 1.

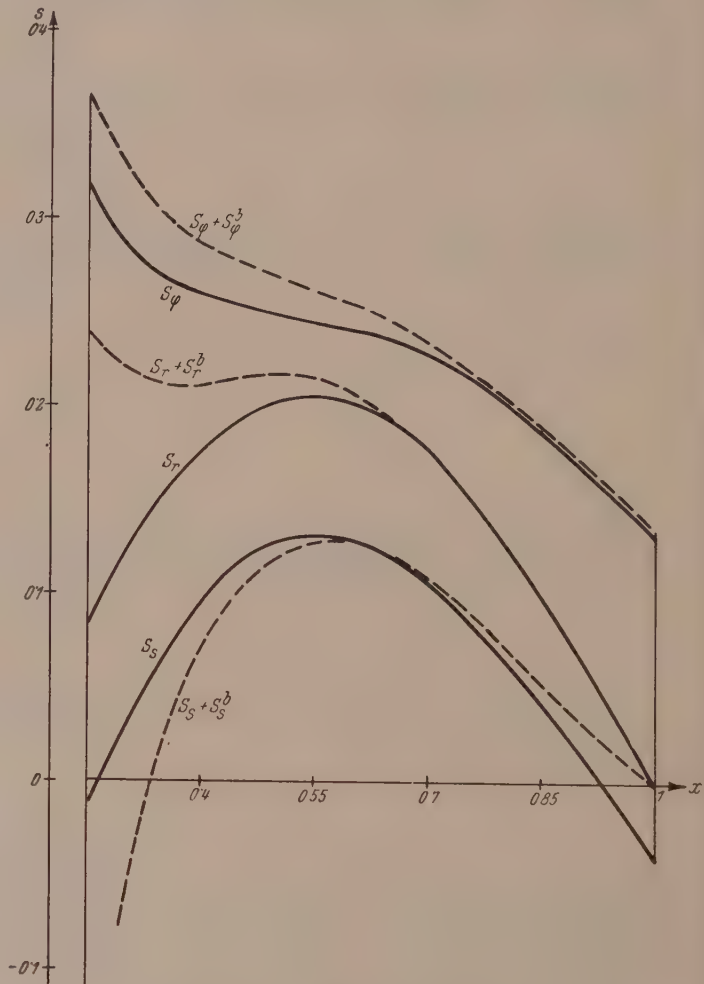


Abb. 6. Spannungsverteilung im halboffenen Laufrad.

spannung tritt als Umfangsspannung an der Nabe auf und wird durch den Bieungsanteil nur unwesentlich erhöht. Den Verlauf der dimensionslos gerechneten Verschiebungen \bar{u} und \bar{w} sowie den Biegewinkel $\bar{\psi}$ zeigt Abb. 7 für dasselbe Beispiel.

III. Die Fliehkraft der Deckscheibe eines geteilten Laufrades.

Bei der geteilten Bauart der Laufräder nach Abb. 2 ist die Deckscheibe ein eigener Teil, der mit der Radscheibe nur in der Nabe verschraubt wird und daher unabhängig

von der Laufradscheibe berechnet werden kann. E. Tschech hat hierfür ein Berechnungsverfahren angegeben, das hier im Auszug besprochen wird, da die Ergebnisse zusammen mit den bisherigen Ableitungen als Grundlage für die Berechnung geschlossener Laufräder dienen können.

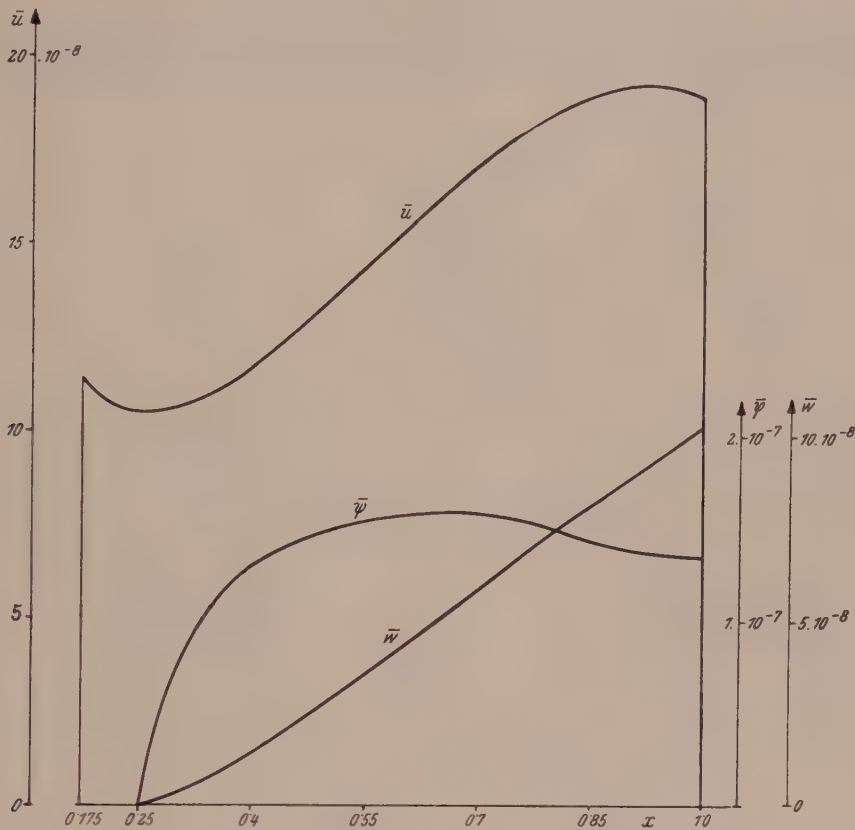


Abb. 7. Verschiebungen am halboffenen Laufrad.

Die meist aus dem Vollen gearbeitete Deckscheibe besteht aus der Nabe, die als starr angenommen werden kann, sowie aus den Speichen, die einen Teil der radialen Beschauflung des geteilten Laufrades bilden, und dem Radkranz. Dieser hat etwa die Form einer Kegelschale. Zu seiner Berechnung könnte die Biegetheorie der Kegelschale veränderlicher Wandstärke herangezogen werden. Man kann sich aber auch der Theorie des stark gekrümmten Ringes bedienen. Diese hat den Vorteil, daß hier auch die nicht rotationssymmetrischen Verformungen infolge der diskontinuierlich über den Umfang verteilten Speichen erfaßt werden können.

Zieht man die Ringtheorie heran, so läuft die Erfassung des elastischen Zusammenwirkens zwischen den Speichen und dem Radkranz auf die Lösung einer zweifach statisch unbestimmten Aufgabe hinaus. Es wird zu diesem Zwecke die Verbindung zwischen Speichenstern und Radkranz gelöst gedacht. Dann werden an den Verbindungsstellen statisch unbestimmte Übertragungskräfte, und zwar je Speiche eine Radialkraft X_1 und ein Moment X_2 angebracht (Abb. 8), worauf jedes System für sich berechnet werden kann. Schließlich müssen die Deformationen von Speiche und Ring an den Verbindungsstellen, das heißt in einem später noch genauer zu

definierenden Punkte O einander gleichgesetzt werden. Die statisch Unbestimmten werden dann aus diesen Zusammenhangsbedingungen ermittelt:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = 0, \\ \delta_2 &= \delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} = 0.\end{aligned}\quad (13)$$

Darin bedeutet δ_1 die radiale Klaffung zwischen Radkranz und Speiche in O , bestehend aus der radialen Klaffung, infolge der äußeren Lasten allein (Fliehkräfte), infolge X_1

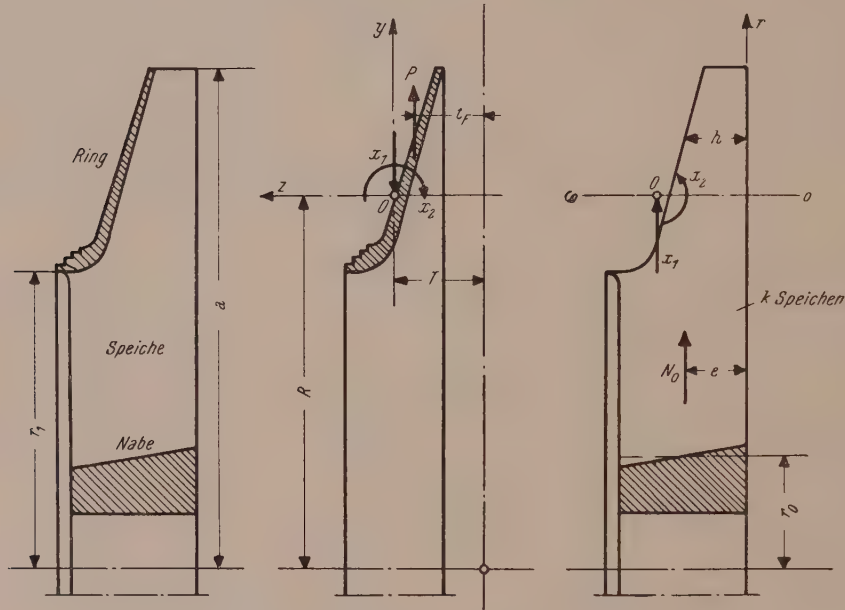


Abb. 8. Berechnungsschema der Deckscheibe.

allein und infolge X_2 allein. Die Größe δ_2 ist die Winkelklaffung in O zwischen Radkranz und Speichenstern. Sie ist ebenso wie δ_1 aufgebaut. Jede Größe δ_{ik} besteht aus ihrem Ring- und ihrem Speichenanteil

$$\delta_{ik} = \delta_{ikR} + \delta_{ikS}.$$

Die Berechnung dieser Anteile muß zuerst erfolgen.

a) Die Formänderung des Radkranzes.

Zufolge der eingangs erwähnten Annahme, daß bei der Deformation des Radkranzes seine Querschnittsgestalt unverändert bleiben soll, können die in jedem Teilchen angreifenden Fliehkräfte zu einer gleichmäßig über den ganzen Radkranzumfang verteilten radialen Kraft P im Abstand t_F zusammengesetzt werden (Abb. 8). Diese radialen Kräfte P bewirken eine gleichmäßige Aufweitung und ein Umstülpen des Radkranzes. Wir trennen diese beiden Vorgänge, indem wir die Kräfte P durch gleichgerichtete, im Punkt O angreifende Kräfte ersetzen, zu denen ein gleichmäßig über den Umfang des Ringes verteiltes Umstülpmoment $W = P(T - t_F)$ hinzutritt, wobei der Punkt O so bestimmt wird, daß die dort angreifenden Radialkräfte eine reine, das heißt umstülpfreie Ringaufweitung erzeugen. Dann muß nach dem Betti'schen Satz derselbe Punkt O für die Belastung W der Drehpunkt des Querschnittes

sein. O heißt der neutrale Punkt des Querschnittes⁴. Seine Koordinaten können festgelegt werden durch die Bedingungen

$$\int_{(F)} \frac{y dF}{R+y} = 0, \quad \int_{(F)} \frac{z dF}{R+y} = 0.$$

Die Größen δ_{10R} und δ_{20R} errechnen sich aus Gleichgewichtsbetrachtungen mit

$$\delta_{10R} = \frac{PR}{2\pi E F}$$

und

$$\delta_{20R} = \frac{PR(T-t_F)}{2\pi E J_y}, \quad (14)$$

worin

$$J_y = \int_{(F)} \frac{z^2 dF}{1 + \frac{y}{R}}$$

bedeutet.

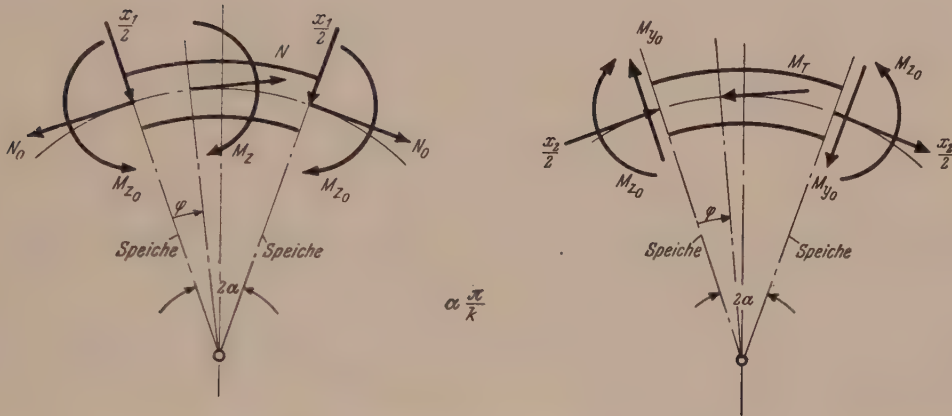


Abb. 9. Ringsegment zwischen zwei Speichen.

Wir betrachten nun ein zwischen zwei aufeinanderfolgenden Speichen liegendes Ringsegment unter der Einwirkung der Kräfte X_1 (siehe Abb. 9). Es wird $M_y = 0$, $M_T = 0$, $N_0 = -\frac{X_1}{2} \cotg \alpha$. Die einfach statisch unbestimmte Rechnung ergibt

$$M_{z0} = -\frac{X_1 R}{2} (\alpha - \cotg \alpha)$$

und damit die Verteilung

$$M_z = \frac{X_1 R}{2} (-\alpha + \sin \varphi + \cotg \alpha \cos \varphi).$$

Ebenso ergibt sich unter den Momenten X_2

$$M_y = \frac{X_2}{2} (\cotg \alpha \cos \varphi + \sin \varphi),$$

$$M_T = -\frac{X_2}{2} (\cotg \alpha \sin \varphi - \cos \varphi),$$

und

$$M_z = X_2 \frac{\alpha}{2} \frac{J_{yz}}{J_y}.$$

⁴ Biezeno-Grammel: Technische Dynamik, S. 396. Berlin: Springer-Verlag, 1939.

Die Einflußgrößen δ_{ikR} berechnen sich nach den bekannten Regeln der Baustatik mit

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11R} &= \frac{R^3 J_y}{2EF\Phi} \left(\frac{\alpha}{2\sin^2 \alpha} + \frac{\cotg \alpha}{2} - \alpha \right) + \frac{R}{4EF} \left(\frac{\alpha}{\sin^2 \alpha} + \cotg \alpha \right), \\ \delta_{12R} = \delta_{21R} &= -\frac{R^2 J_{yz}}{2EF\Phi} \left(-\alpha + \frac{\alpha}{2\sin^2 \alpha} + \frac{1}{2} \cotg \alpha \right), \\ \delta_{22R} &= \frac{R}{E} \left[\left(\frac{J_z}{2\Phi} + \frac{1+\nu}{J_T} \right) \frac{\alpha}{2\sin^2 \alpha} + \left(\frac{J_z}{2\Phi} - \frac{1+\nu}{J_T} \right) \frac{\cotg \alpha}{2} - \frac{J_{yz}^2 \alpha}{2J_y \Phi} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Darin bedeutet Φ den Ausdruck

$$\Phi = J_y J_z - J_{yz}^2,$$

$$J_y = \int_{(F)} \frac{z^2 dF}{1 + \frac{y}{R}}$$

und wegen

$$\begin{aligned} \int_{(F)} \frac{y dF}{R + y} &= 0, \\ J_z &= \int_{(F)} \frac{y^2 dF}{1 + \frac{y}{R}} = R \int_{(F)} y dF, \\ J_{yz} &= \int_{(F)} \frac{y z dF}{1 + \frac{y}{R}} = R \int_{(F)} z dF. \end{aligned}$$

J_T ist der Torsionswiderstand des Ringquerschnittes. Er wird für das schmale Profil numerisch nach der Formel

$$J_T = \frac{1}{3} \int_0^U t^3 ds$$

bestimmt, wobei U die Abwicklung der Querschnittsmittellinie und t die veränderliche Profildicke bedeutet.

b) Die Formänderung der Speiche.

Ebenso wie bei der Ringberechnung haben wir auch hier wieder nacheinander die Deformationen der Speiche unter der Einwirkung der Fliehkräfte und der beiden statischen Unbestimmten $X_1 = 1$ und $X_2 = 1$ zu bestimmen. Dabei sind lediglich die Verschiebungen und Drehungen des durch den Drehpunkt O hindurchgehenden Querschnittes $_{00}$ aufzusuchen (siehe Abb. 8). Die Nabe wird zylindrisch mit dem Halbmesser r_0 angenommen. Wenn die Speiche die jeweilige Höhe h und die Dicke t_s besitzt, ist die durch die Fliehkraft hervorgerufene Längskraft

$$N_0 = \mu \omega^2 \int_r^a h t_s r dr.$$

Da diese exzentrisch angreift, verbiegt sie die Speiche mit einem Biegemoment

$$M_0 = N_0 \left(\frac{h}{2} - e \right),$$

wenn e den Abstand des Angriffspunktes von N_0 von der r -Achse bedeutet. Die Verlängerung δ_{10s} der Speiche zwischen r_0 und R ergibt sich mit

$$E \delta_{10s} = \int_{r_0}^R \frac{N_0}{F_s} dr + \int_{r_0}^R \frac{M_0 M_1}{J_s} dr.$$

Analog ist

$$E \delta_{11s} = \int_{r_0}^R \frac{dr}{F_s} + \int_{r_0}^R \frac{M_1^2}{J_s} dr, \quad (16)$$

$$E \delta_{12s} = E \delta_{21s} = \int_{r_0}^R \frac{M_1}{J_s} dr,$$

$$E \delta_{22s} = \int_{r_0}^R \frac{dr}{J_s}.$$

c) Die Bestimmung der statisch Unbestimmten X_1 und X_2 .

Nachdem die an Ring und Speiche im Punkte O zufolge der Fliehkräfte, der Einzelkräfte $X_1 = 1$ und der Einzelmomente $X_2 = 1$ auftretenden Formänderungen berechnet sind, können nun die Koeffizienten der Gl. (13) angeschrieben und diese nach X_1 und X_2 aufgelöst werden. Dann ist es mit Hilfe der Größen X_1 und X_2 möglich, die Gesamtdeformation des Ringes als algebraische Summe der errechneten Einzeldeformationen zu bestimmen. Ebenso können die Deformationen in den Feldmitten des Ringes bestimmt werden. Nach den bekannten Formeln für den stark gekrümmten Ring kann man auch an jeder Stelle den Spannungszustand ermitteln.

d) Zahlenbeispiel 2.

Eine solche Berechnung der Verformungen und Spannungen wurde für eine Deckscheibe nach Abb. 10 mit 135 mm Außenradius aus Duralumin durchgeführt. Die senkrecht zur Oberfläche des Deckringmantels ermittelten Verschiebungsgrößen v sind in dieser Abbildung durch Höhenlinien dargestellt. Ihr größter Wert beträgt 0,689 mm bei 22000 U/min, die Radialverschiebung an dieser Stelle 0,277 mm und die Axialverschiebung 0,636 mm. Dagegen ist die entsprechende Verschiebung an den Speichenangriffsstellen nur 0,282 mm. Diese Verschiebungen sind somit für die Bemessung der Luftspalte recht bedeutungsvoll.

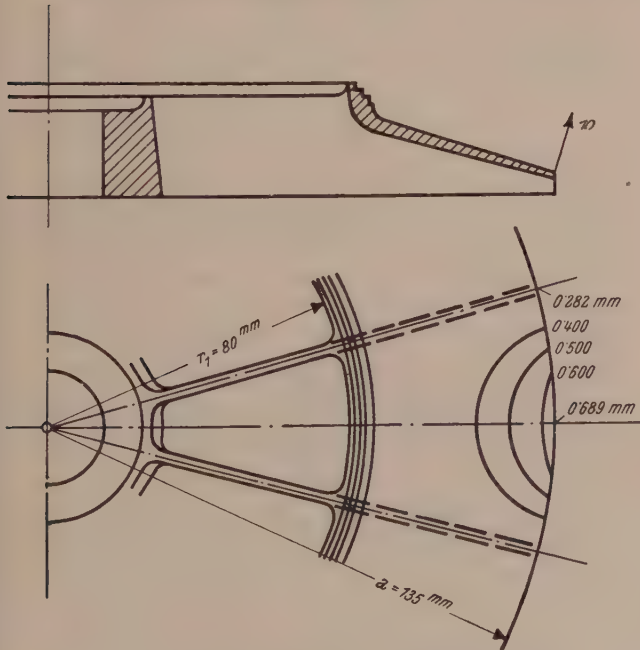


Abb. 10. Deckscheibe zu Rechenbeispiel 2.

Abb. 11 zeigt den Spannungsverlauf im Ringquerschnitt in Feldmitte zwischen zwei Speichen in axonometrischer Darstellung. Der größte Spannungswert $S = \frac{\sigma}{\mu a^2 \omega^2} = 0.50$ tritt am

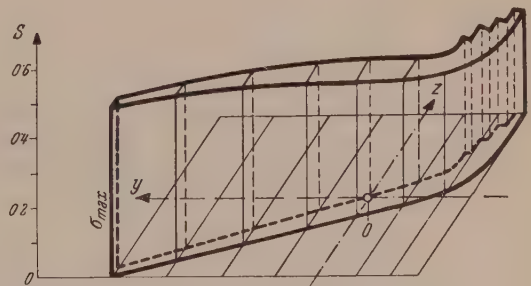


Abb. 11. Umfangsspannungen der Deckscheibe in Feldmitte.

Außenrand auf und entspricht einer tatsächlichen Spannung von $\sigma = 1380 \text{ kg/cm}^2$ bei 22000 U/min.

IV. Das geschlossene Laufrad.

Für das geschlossene Laufrad nach Abb. 1, bestehend aus einer rotierenden Scheibe, den Schaufeln und dem Deckring, muß die Berechnung ähnlich wie im vorhergehenden Abschnitt den Zusammenhang zwischen dem Deckring und dem halboffenen Laufrad formulieren. Es gilt hier für die radiale Klaffung analog zu Gl. (13) die Beziehung

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = \delta_{10R} + \delta_{10L} + X_1 (\delta_{11R} + \delta_{11L}) + X_2 (\delta_{12R} + \delta_{12L}) = 0 \quad (17)$$

und für die Winkelklaffung

$$\delta_2 = \delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} = \delta_{20R} + \delta_{20L} + X_1 (\delta_{21R} + \delta_{21L}) + X_2 (\delta_{22R} + \delta_{22L}) = 0. \quad (18)$$

Die auf den Deckring bezüglichen Einflußgrößen δ_{ikR} sind identisch den in Abschnitt III berechneten, da sich am Deckring nichts geändert hat. An die Stelle des Speichensternes ist gegenüber vorher aber nun das halboffene Laufrad getreten, dessen Einflußgrößen als δ_{ikL} bezeichnet werden. Da es sich für den Zusammenhang um die Deformation des Querschnittes $r = R$ durch die Drehpunkte O des Deckringes handelt, müssen diese nun auf Grund der in dem Abschnitt II für das halboffene Laufrad unter Einwirkung der Fliehkraft ermittelten Verformungen u_0 des Punktes D und ψ_0 für diesen Schnitt ermittelt werden. Es ist

$$\delta_{10L} = u_0 - c \psi_0 \quad \text{und} \quad \delta_{20L} = \psi_0.$$

c bedeutet den Abstand des Punktes O von D nach Abb. 12.

Die jetzt noch unbekannten Größen δ_{11L} , $\delta_{12L} = \delta_{21L}$, δ_{22L} müssen in gesonderten Rechnungsgängen erst bestimmt werden. In Abänderung der in Abschnitt II ermittelten gleichmäßigen radialen Dehnung eines rotierenden halboffenen Laufrades unter der Wirkung der Fliehkkräfte ist nun ein solches im Halbmesser $r = R$ durch k Kräfte X_1 in O belastet und ruhend zu betrachten. Für die nun auftretende Radialverschiebung u_1 gilt die Differentialgleichung (3) ohne Fliehkraftglied

$$\alpha u_1'' + \beta u_1' + \gamma u_1 = 0$$

mit den Randbedingungen, daß innen für $r = r_i$, $\sigma_r = 0$ und für $r = R$ und $X_1 = 1$

bei k Rippen $2 R \pi (y \sigma_r + \eta \sigma_s) = k$ sein muß. Diese zweite Randbedingung lautet mit $\sigma_s = \sigma_r - \nu \sigma_\varphi$

$$(y + \eta) \sigma_r - \nu \eta \sigma_\varphi = \frac{k}{2 R \pi}$$

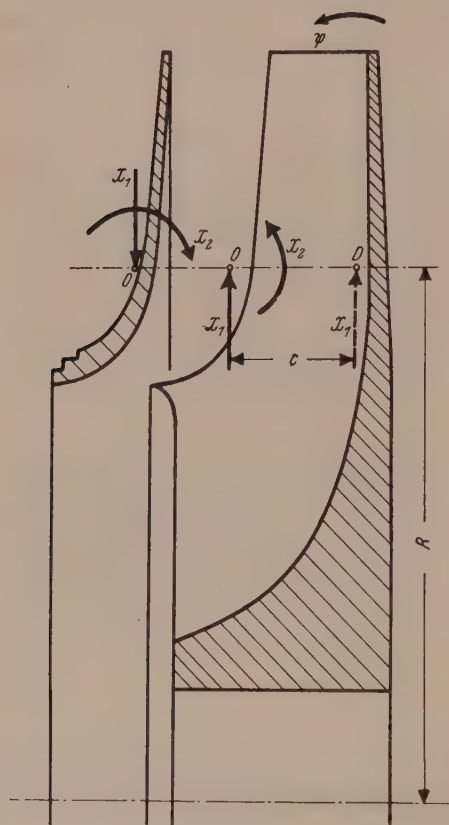


Abb. 12. Berechnungsschema des geschlossenen Laufrades.

und nach Einsetzen der Ausdrücke aus Gl. (2) für σ_r und σ_φ

$$(y + \eta) \left(u_I' + \nu \frac{u_I}{R} \right) - \nu \eta \left(\frac{u_I}{R} + \nu u_I' \right) = \frac{k(1 - \nu^2)}{2ER\pi}.$$

Die Lösung des Gleichungssystems, dessen Koeffizienten dieselben wie für die Berechnung von u_0 sind, führt zum Wert von u_I für den Punkt D . Die Rechnung unterscheidet sich von der in Abschnitt II ausgeführten Differenzenrechnung nur dadurch, daß jetzt das Fliehkraftglied $\delta_m = 0$ ist.

Außer der radialen Verschiebung u_1 wird sich unter den Momenten $X_1 \cdot c$ noch eine Verbiegung des Laufrades einstellen, die nach Abschnitt II berechnet werden kann. Unter denselben Voraussetzungen, wie sie dort getroffen wurden, bringt diese nur eine Verdrehung des Zylinderschnittes $r = R$ um den Punkt D hervor. Zur Berechnung dieser Verdrehung ist die Differentialgleichung (12) heranzuziehen, wobei für σ_r , σ_s und σ_φ die unter $X_1 = 1$ entstandenen, zu u_1 gehörigen Spannungen einzusetzen sind. Die Randbedingungen lauten nun, daß für die Nabe bei $r = r_i$ $\psi_I = 0$ und für $r = R$, $M_r = \frac{kc}{2R\pi}$ sein muß, wobei $X_1 = 1$ eingeführt wurde. Auch diese Teilrechnung muß als Differenzenrechnung ausgeführt werden. Wenn sich für $X_1 = 1$ für den Punkt D ein Wert ψ_I ergibt, ist die unter dieser Kraft entstehende Radialverschiebung des Punktes O

$$\delta_{11L} = u_I - c \psi_I$$

und die Verdrehung

$$\delta_{21L} = \psi_I.$$

Weiters müssen die zu $X_2 = 1$ gehörigen Verformungen am halboffenen Laufrad ermittelt werden. Diese reine Momentenbelastung ruft unter den getroffenen Vereinfachungen nach Abschnitt II nur eine Verdrehung des Querschnittes um D hervor, deren Berechnung wieder mit Hilfe der Differentialgleichung (12) unter der Bedingung $\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_s = 0$ erfolgen kann. Da der Einfluß dieser Spannungen auf den Rechnungsgang gering ist, genügt meist ein Differenzenrechnungsgang für beide Momente, so daß der unter dem Moment $X_1 c = c$ für $X_1 = 1$ entstandenen Verdrehung ψ_I nun unter dem Moment $X_2 = 1$ angenähert eine Verdrehung

$$- \psi_{II} = \frac{1}{c} \psi_I$$

entspricht.

Es entstehen somit unter dem Moment $X_2 = 1$ die Verformungen

$$\delta_{12L} = -c \psi_{II} = \psi_I,$$

$$\delta_{22L} = \psi_{II} = -\frac{1}{c} \psi_I.$$

Für die Berechnung eines geschlossenen Laufrades sind nach dem geschilderten Verfahren Differenzenrechnungen zur Bestimmung von u_0 , u_I , ψ_0 und ψ_I auszuführen. Mit diesen Ergebnissen sind alle Einflußgrößen und damit aus den Gl. (17) und (18) auch die statisch Überzähligen X_1 und X_2 bestimmt. Da nun der Verformungszustand des Laufrades durch die resultierenden radialen Verschiebungen der Mittelfläche $u = u_0 + X_1 u_I$ und die Verdrehungen

$$\psi = \psi_0 + X_1 \psi_I + X_2 \psi_{II}$$

gegeben ist, kann aus diesen auch der Spannungszustand im Laufrad nach Abschnitt II sowie im Deckring nach Abschnitt III berechnet werden.

Zahlenbeispiel 3.

Ein geschlossenes Laufrad von der in Abb. 13 gezeigten Form mit dem Außenradius $a = 13.5$ cm mit $k = 12$ Schaufeln wurde durchgerechnet und ergab die in Abb. 14 zusammengestellten Beanspruchungen und Verschiebungen. Die Spannungen im Deckring sind hier etwas geringer als die desselben Deckringes mit Schaufelstern

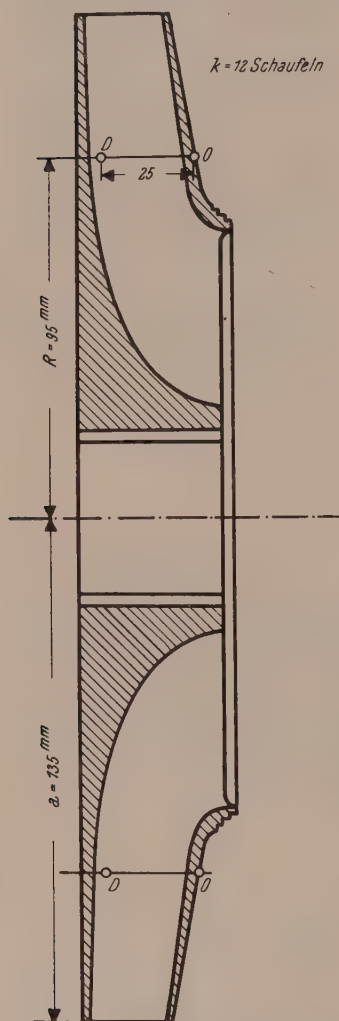


Abb. 13. Geschlossenes Laufrad zu Rechenbeispiel 3.

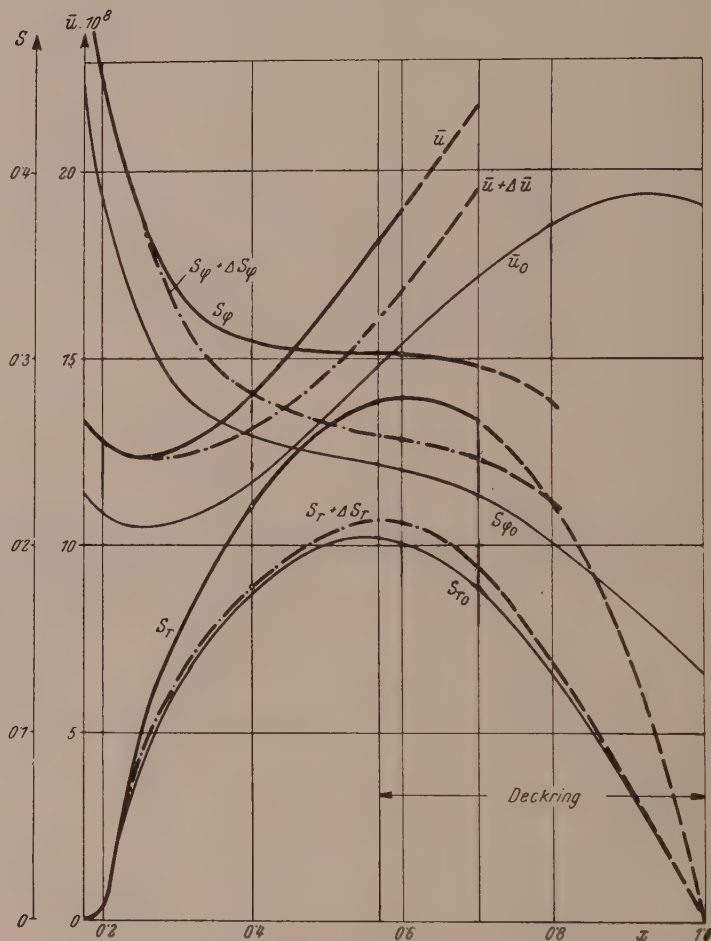


Abb. 14. Spannungsverteilung im geschlossenen Laufrad.

im Zahlenbeispiel 2, da das halboffene Laufrad größere radiale Steifigkeit besitzt. Die Radialverschiebung der Deckscheibe beträgt hier dimensionslos gerechnet an den Speichenangriffspunkten $\bar{u} = 341.5 \cdot 10^{-9}$ gegen $\bar{u} = -401 \cdot 10^{-9}$ beim Deckring mit Schaufelstern. Die in Scheibenmitte auftretenden Spannungsgrößen $S_r + \Delta S_r$ und $S_\varphi + \Delta S_\varphi$ sind von ähnlicher Größe wie beim halboffenen Laufrad, da die Vergrößerung der Fliehkraftspannungen zufolge der Deckscheibe durch die Biegewirkungen praktisch wieder aufgehoben wird.

(Eingegangen am 20. Januar 1953.)

Über eine besondere Klasse von zweiten Randwertaufgaben.

Von P. Lesky, Innsbruck.

Mit 1 Textabbildung.

Zusammenfassung. In einem kreisförmigen und elliptischen Bereich wird folgende Randwertaufgabe behandelt: Gesucht ist eine harmonische Funktion, deren Ableitung nach einer abwechselnd ins Äußere und ins Innere des Bereiches weisenden Richtung auf dem Rande vorgegeben ist.

Summary. In a circular and elliptic range the following marginal value problem is being treated: An harmonic function is to be found whose derivation conformable to a direction alternately leading outwards and inwards of the range under consideration, is given on the margin.

Résumé. L'auteur a choisi la sphère circulaire et elliptique pour traiter le problème suivant des valeurs marginales: Il cherche à établir une fonction harmonique dont la dérivée selon une direction visant alternativement l'extérieur et l'intérieur de la sphère, est donnée à la circonférence de cette dernière.

I.

Für einen einfach zusammenhängenden Bereich B der xy -Ebene mit der durch reguläre Kurvenstücke gebildeten Berandung $R(B)$ sei folgendes Problem gegeben:

$$\Delta \varphi(x, y) = 0 \text{ in } B, \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi(x, y)}{dv} \equiv \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} f(\cos(nx) \sin(nx)) + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} g(\cos(nx) \sin(nx)) = F(s) \text{ auf } R(B),$$

wobei es sich in $f[\dots]$ und $g[\dots]$ um beliebige stetige Funktionen der Cosinusse bzw. Sinusse der Winkel (nx) handeln soll. Unter n verstehen wir die äußere Normale bezüglich $R(B)$, unter s die Bogenlänge auf $R(B)$ und unter $F(s)$ eine stückweise stetige Funktion der Bogenlänge s .

Der einfachste Fall würde mit

$$f[\dots] = \cos(nx), \quad g[\dots] = \sin(nx)$$

vorliegen, dann würde es sich um das Problem von Neumann in B handeln, wobei auf $R(B)$

$$\frac{d\varphi}{dn} = F(s)$$

vorgegeben wäre. Sind aber $f[\dots]$ und $g[\dots]$ keine linearen Funktionen von $\cos(nx)$ und $\sin(nx)$ mehr, dann tritt der Umstand auf, daß die Richtung v , nach der wir die Funktion $\varphi(x, y)$ ableiten, abwechselnd ins Äußere und ins Innere von B weist.

Wir betrachten hierzu einen einfachen Spezialfall, nämlich

$$f[\dots] = \cos 2(nx) = \cos^2(nx) - \sin^2(nx),$$

$$g[\dots] = \sin 2(nx) = 2 \sin(nx) \cos(nx),$$

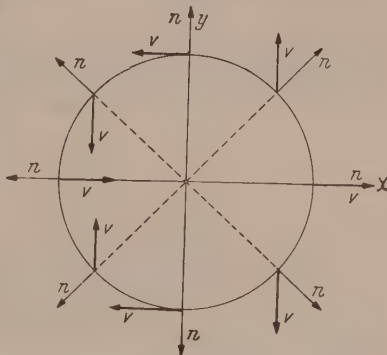
das heißt, es handelt sich um das Problem

$$\Delta \varphi = 0 \text{ in } B, \quad (2)$$

$$\frac{d\varphi}{dv} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos 2(nx) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin 2(nx) = F(s) \text{ auf } R(B).$$

Nehmen wir B kreisförmig an, dann gibt uns die Abbildung ein Bild der Richtungen für die vorgegebenen Ableitungen.

Im folgenden wollen wir uns mit den Fällen, in denen es sich um einen kreisförmigen bzw. elliptischen Bereich handelt, befassen, wobei sich im Laufe der Berechnung ein neues, völlig ungewohntes Summierungsverfahren ergeben wird.



Der Fall (2) ist für den Kreis von G. Platone¹ und für die Ellipse von mir² behandelt und mit einem Existenztheorem als lösbar erwiesen worden.

II.

Zunächst transformieren wir das Problem (1) in Polar- bzw. konfokale elliptische Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \Theta & x &= \left(\frac{1+q}{2} \varrho + \frac{1-q}{2} \frac{1}{\varrho} \right) \cos \Theta \equiv u \cos \Theta \\ y &= \varrho \sin \Theta & y &= \left(\frac{1+q}{2} \varrho - \frac{1-q}{2} \frac{1}{\varrho} \right) \sin \Theta \equiv v \sin \Theta \end{aligned} \quad \begin{matrix} 0 \leq \varrho \leq 1, \\ \varrho_0 \leq \varrho \leq 1. \end{matrix} \quad (3)$$

$\varrho = 1$ erzeugt die Ellipse, deren kleine Achse q und deren große Achse 1 ist und die den $R(B)$ bilden soll;

$$\varrho_0 = \sqrt{\frac{1-q}{1+q}}$$

erzeugt die dem Abstand zwischen den Brennpunkten $\overline{FF'}$ entsprechende ausgeartete Ellipse. Für $q = 1$ gehen die elliptischen in die Polarkoordinaten über; das heißt, in den folgenden Untersuchungen, die wir für die Ellipse führen, sind mit $q = 1$ die entsprechenden Ergebnisse am Kreis enthalten. Es wird so

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dv} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \left[\frac{\varrho v \cos \Theta}{v^2 \cos^2 \Theta + u^2 \sin^2 \Theta} f \left(\frac{v \cos \Theta}{\sqrt{v^2 \cos^2 \Theta + u^2 \sin^2 \Theta}}, \frac{u \sin \Theta}{\sqrt{v^2 \cos^2 \Theta + u^2 \sin^2 \Theta}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varrho u \sin \Theta}{\sqrt{\cdot}} g(\dots) \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} \left[-\frac{u \sin \Theta}{\sqrt{\cdot}} f(\dots) + \frac{v \cos \Theta}{\sqrt{\cdot}} g(\dots) \right] \end{aligned}$$

und für $R(B)$ ($\varrho = 1$) ergibt sich die neue Randbedingung

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right)_{\varrho=1} \left[q \cos \Theta f \left(\frac{q \cos \Theta}{\sqrt{q^2 \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta}}, \frac{\sin \Theta}{\sqrt{\cdot}} \right) + \sin \Theta g(\dots) \right] + \\ &+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} \right)_{\varrho=1} [-\sin \Theta f(\dots) + q \cos \Theta g(\dots)] = F(\Theta) (q^2 \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta) \equiv G(\Theta). \end{aligned} \quad (4)$$

Aus der Differentialgleichung wird

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Theta^2} = 0 \quad (5)$$

für elliptische und Polarkoordinaten. (4) und (5) stellen nun unser Randwertproblem in den neuen Koordinaten dar. Diese Bedingungen sind aber zur eindeutigen Berechnung der Lösung $\varphi(\varrho, \Theta)$ noch nicht hinreichend. Wie A. Ghizzetti in seiner Arbeit: „Sui problemi di Dirichlet e di Neumann per l'ellisse“³ zeigt, müssen im Falle der Ellipse für $\varphi(\varrho, \Theta)$ die weiteren Bedingungen erfüllt sein:

$$\left. \begin{aligned} &\text{für } \varrho = \varrho_0 \text{ muß } \varphi(\varrho, \Theta) \text{ eine gerade Funktion von } \Theta, \\ &\text{für } \varrho = \varrho_0 \text{ muß } \frac{\partial \varphi(\varrho, \Theta)}{\partial \varrho} \text{ eine ungerade Funktion von } \Theta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

sein. Man sieht diese Bedingungen unmittelbar ein, wenn man die Ellipse $\varrho_0 \leq \varrho \leq 1$ auf einen Kreisring abbildet, dessen Innenradius ϱ_0 und dessen Außenradius 1 ist. Beim Kreis entspricht dies der Bedingung, daß die Lösung für $\varrho = 0$ regulär sein muß. Darüber hinaus muß die vorgegebene Funktion $G(\Theta)$ sogenannten Verträglichkeitsbedingungen genügen, die sich im Laufe der Berechnung unseres Problems ergeben werden.

¹ M. G. Platone: Sugli stati di tensione piana in un corpo cilindrico elastico, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, Serie III, Vol. V, Fasc. 1—II.

² P. Lesky: Determinazione degli stati di tensione piana in un cilindro elastico a sezioni ellittiche, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, Serie III, Vol. VI, Fasc. III—IV.

³ Volume XX (1951) dei „Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova“.

III.

In der üblichen Art suchen wir die Lösung in einer Fourier-Reihe darzustellen:

$$\varphi(\varrho \Theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(\varrho) \cos k \Theta + b_k(\varrho) \sin k \Theta)$$

mit den Fourier-Koeffizienten:

$$a_k(\varrho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\varrho \Theta) \cos k \Theta d\Theta; \quad b_k(\varrho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\varrho \Theta) \sin k \Theta d\Theta.$$

Zu deren Bestimmung findet man, die Konvergenzeigenschaften der Fourier-Reihe voraussetzend, die Differentialgleichungen

$$a_k''(\varrho) + \frac{1}{\varrho} a_k'(\varrho) - \frac{k^2}{\varrho^2} a_k(\varrho) = 0,$$

$$b_k''(\varrho) + \frac{1}{\varrho} b_k'(\varrho) - \frac{k^2}{\varrho^2} b_k(\varrho) = 0.$$

Deren Lösungen sind:

$$a_k(\varrho) = A_k \varrho^k + B_k \varrho^{-k}, \quad b_k(\varrho) = C_k \varrho^k + D_k \varrho^{-k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Die Bedingungen (6) fordern $a_0'(\varrho_0) = 0$, $b_k(\varrho_0) = 0$, $a_k'(\varrho_0) = 0$, das heißt

$$B_0 = 0; \quad B_k = A_k \varrho_0^{2k}; \quad D_k = -C_k \varrho_0^{2k}, \quad (7)$$

bzw. beim Kreis ($\varrho_0 = 0$)

$$B_0 = 0; \quad B_k = 0; \quad D_k = 0.$$

Es bleibt somit die Bestimmung der Konstanten A_k und C_k auf Grund der in (4) für $\varrho = 1$ gesetzten Bedingung, das heißt aus

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} [q \cos \Theta f(\dots) + \sin \Theta g(\dots)] + \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} [-\sin \Theta f(\dots) + \right. \\ & \left. + q \cos \Theta g(\dots)] \right\} \frac{\cos k \Theta}{\sin k \Theta} d\Theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\Theta) \frac{\cos k \Theta}{\sin k \Theta} d\Theta \equiv \begin{matrix} g_k, & k = 0, 1, 2, \dots \\ h_k, & k = 1, 2, 3, \dots \end{matrix} \end{aligned} \quad (8)$$

Durch Integration der Gl. (8) findet man dann Formeln zur Bestimmung der A_k und C_k , wodurch das Problem formell gelöst ist. Wir beschränken uns im folgenden darauf, den Sonderfall (2) durchzuarbeiten, der uns zumindestens Einblick in die äußerst eigenartige Bestimmung der A_k und C_k gibt.

IV.

Im Falle des Problems (2) haben wir

$$f = \frac{q^2 \cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta}{q^2 \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta}; \quad g = \frac{2 \sin \Theta \cos \Theta}{q^2 \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta},$$

und daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} q \cos \Theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} \sin \Theta \right]_{\varrho=1} \frac{\cos k \Theta}{\sin k \Theta} d\Theta &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\Theta) \frac{\cos k \Theta}{\sin k \Theta} d\Theta \\ &= \begin{matrix} g_k, & k = 0, 1, 2, \dots \\ h_k, & k = 1, 2, 3, \dots \end{matrix} \end{aligned}$$

woraus man durch Integration

$$\begin{aligned} q [a_{k+1}'(1) + a_{k-1}'(1)] - [(k+1)a_{k+1}(1) - (k-1)a_{k-1}(1)] &= 2g_k, \quad k=0, 1, 2, \dots \\ q [b_{k+1}'(1) + b_{k-1}'(1)] - [(k+1)b_{k+1}(1) - (k-1)b_{k-1}(1)] &= 2h_k, \quad k=1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

erhält. Die $a_k b_k$ einsetzend, erhält man für

$$\left. \begin{aligned} k=0 : & 2(1-q)A_1 = -g_0, \\ k=1 : & A_2(1-q)(1+q_0^2) = -g_1; \quad C_2(1-q)(1-q_0^2) = -h_1, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} k \geq 2 : & \begin{cases} (1+q)(k-1)A_{k-1} - (1-q)(k+1)A_{k+1} = \frac{2g_k}{1+q_0^{2k}}, \\ (1+q)(k-1)C_{k-1} - (1-q)(k+1)C_{k+1} = \frac{2h_k}{1-q_0^{2k}}. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Für den Kreis entstehen unmittelbar die Verträglichkeitsbedingungen

$$g_0 \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\Theta) d\Theta = 0; \quad g_1 \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\Theta) \cos \Theta d\Theta = 0; \quad h_1 \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\Theta) \sin \Theta d\Theta = 0 \quad (11)$$

für die gegebene Funktion $G(\Theta)$. Für $k=2, 3, 4, \dots$ erhält man

$$A_{k-1} = \frac{g_k}{k-1}; \quad B_{k-1} = \frac{h_k}{k-1} \quad (12)$$

und die Lösungsreihe im Falle des Kreises hat dann die Form

$$\varphi(q\Theta) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} [g_{k+1} \cos k\Theta + h_{k+1} \sin k\Theta] \quad (13)$$

mit einer willkürlich wählbaren Konstanten A_0 . Für die Ellipse bleiben Rekursionsformeln zur Bestimmung der A_k und C_k ; die zum Falle des Kreises analogen Verträglichkeitsbedingungen müßten sich im Laufe der Rechnung ergeben.

V.

Bisher konnten wir Schritt für Schritt so ausführen, daß mit $q=1$ aus dem Falle der Ellipse automatisch der Fall des Kreises entsteht. Wollen wir nun aus den Rekursionsformeln (10) die A_k und C_k für $k \geq 2$ bestimmen, so wäre es natürlich, jedes A_k und C_k durch die vorhergehenden A_i ($i < k$) zu bestimmen (bzw. C_i). Die diesbezüglichen Bestimmungsgleichungen wären

$$\left. \begin{aligned} A_{k+1} &= -\frac{2g_k}{1+q_0^{2k}} \frac{1}{(1-q)(k+1)} + A_{k-1} \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{q_0^2}, \\ C_{k+1} &= -\frac{2h_k}{1-q_0^{2k}} \frac{1}{(1-q)(k+1)} + C_{k-1} \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{q_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Diese verlieren aber für $q=1$ ihren Sinn. Es wird nun behauptet, daß man hier den umgekehrten Weg einzuschlagen hat; das heißt, daß man jedes A_k bzw. C_k durch alle darauffolgenden A_i und C_i ($i > k$) zu bestimmen hat. Mit anderen Worten aus

$$\left. \begin{aligned} A_{k-1} &= -\frac{2g_k}{1+q_0^{2k}} \frac{1}{(1+q)(k-1)} + A_{k+1} \frac{k+1}{k-1} q_0^2, \\ C_{k-1} &= -\frac{2h_k}{1-q_0^{2k}} \frac{1}{(1+q)(k-1)} + C_{k+1} \frac{k+1}{k-1} q_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Indem man von $k+1$ auf $k+3$ weitergeht usw. erhält man schließlich

$$\left. \begin{aligned} A_{2k+1} &= \frac{2}{(2k+1)(1+q)} \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{g_{2l}}{1+q_0^{4l}} q_0^{2l-2k-2}, \\ A_{2k} &= \frac{1}{k(1+q)} \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{g_{2l-1}}{1+q_0^{4l-2}} q_0^{2l-2k-2}, \\ C_{2k+1} &= \frac{2}{(2k+1)(1+q)} \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{h_{2l}}{1-q_0^{4l}} q_0^{2l-2k-2}, \\ C_{2k} &= \frac{1}{k(1+q)} \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{h_{2l-1}}{1-q_0^{4l-2}} q_0^{2l-2k-2}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Da aber laut (9) A_1 , A_2 und C_2 bereits bestimmt sind, müssen die für diese Konstanten entstehenden Summen mit den Werten aus (9) übereinstimmen. So erhalten wir drei Verträglichkeitsbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{1+q_0^{4k}} q_0^{2k} g_{2k} + g_0 &= 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{2k-1}}{1+q_0^{4k-2}} q_0^{2k-2} &= 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_{2k-1}}{1-q_0^{4k-2}} q_0^{2k-2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Man sieht unmittelbar, daß die in (16) und (17) erhaltenen Resultate für $q=1$ mit denen des Kreises übereinstimmen; doch bedarf es noch eines Beweises, daß diese invers vorgenommene Summierung das richtige Resultat liefert.

VI.

Zu diesem Beweis nehmen wir den Fall $q=1$ ausschließend (es sei immer $q < 1$) die Berechnung der Koeffizienten A_k und C_k mit Hilfe der Rekursionsformeln (14) vor. So erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} A_{2k} &= -\frac{1}{k(1+q)} \sum_{l=1}^k \frac{g_{2l-1}}{q_0^{2k-2l+2}(1+q_0^{4l-2})}, \\ A_{2k+1} &= -\frac{1}{(2k+1)(1+q)} \left\{ \frac{g_0}{2q_0^{2k+2}} + 2 \sum_{l=1}^k \frac{g_{2l}}{q_0^{2k-2l+2}(1+q_0^{4l})} \right\}, \\ C_{2k} &= -\frac{1}{k(1+q)} \sum_{l=1}^k \frac{h_{2l-1}}{q_0^{2k-2l+2}(1-q_0^{4l-2})}, \\ C_{2k+1} &= \frac{C_1}{(2k+1)q_0^{2k}} - \frac{2}{(2k+1)(1+q)} \sum_{l=1}^k \frac{h_{2l}}{q_0^{2k-2l+2}(1-q_0^{4l})}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Beachten wir nun den Umstand, daß für die Fourier-Koeffizienten

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\varrho) \rightarrow 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k(\varrho) \rightarrow 0 \quad (19)$$

für jedes ϱ aus $(0, 1)$ gelten muß. Weil nun laut (7)

$$a_k(\varrho) = A_k(\varrho^k + \varrho_0^{2k} \varrho^{-k}); \quad b_k(\varrho) = C_k(\varrho^k + \varrho_0^{2k} \varrho^{-k})$$

ist, können die Bedingungen (19) für $\varrho = 1$ nur dann erfüllt sein, wenn die vier Bedingungen gelten:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{2k-1}}{1 + \varrho_0^{4k-2}} \varrho_0^{2k-2} &= 0; & \frac{g_0}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{2k}}{1 + \varrho_0^{4k}} \varrho_0^{2k} &= 0; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_{2k-1}}{1 - \varrho_0^{4k-2}} \varrho_0^{2k-2} &= 0; & C_1 - \frac{2}{1+q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_{2k}}{1 - \varrho_0^{4k}} \varrho_0^{2k-2} &= 0. \end{aligned}$$

Die ersten drei sind die bereits in (17) gefundenen Verträglichkeitsbedingungen, die vierte legt C_1 fest und ist bereits in (16) enthalten. Benützt man diese eben gefundenen Bedingungen und fügt sie zu den Gl. (18), so erhält man für die Koeffizienten A_k und C_k die schon in (16) gefundenen Gleichungen — wie es behauptet wurde.

Die Lösung des Problems im Falle der Ellipse hat die Form

$$\begin{aligned} \varphi(\varrho \Theta) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2 \varrho^l \varrho_0^{2k-2}}{l(1+q)} \left[\frac{g_{l+2k-1} \cos l \Theta}{1 + \varrho_0^{2l+4k-2}} + \frac{h_{l+2k-1} \sin l \Theta}{1 - \varrho_0^{2l+4k-2}} \right] + \\ &+ \frac{2 \varrho^{-l} \varrho_0^{2l+2k-2}}{l(1+q)} \left[\frac{g_{l+2k-1} \cos l \Theta}{1 + \varrho_0^{2l+4k-2}} - \frac{h_{l+2k-1} \sin l \Theta}{1 - \varrho_0^{2l+4k-2}} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Die Konvergenzuntersuchungen bezüglich (20) bzw. (13) findet man in den unter Anm. 1 und 2 zitierten Arbeiten.

(Eingegangen am 9. Dezember 1952.)

Beitrag zur Stabilität des Schwingungsvorganges im Differentialwasserschloß.

Von H. Weirich, Darmstadt.

Zusammenfassung. Ausgehend von der Bewegungsgleichung des Schwingungsvorganges im Differentialwasserschloß für den Belastungsfall werden bei Regelung auf konstante Leistung zwei Stabilitätsbedingungen für den erforderlichen Schloßquerschnitt und eine weitere Bedingung für die größte Leistungsabgabe bzw. den größten Reibungsverlust im Stollen zu Belastungsende für gedämpften Schwingungsverlauf angegeben. Dann folgt eine Beziehung für das kleinste Querschnittsverhältnis und damit für den kleinsten noch zulässigen Zentralrohrquerschnitt. Die Anwendung der gewonnenen Ergebnisse wird an Hand eines Beispiels gezeigt.

Summary. Subsequent to the equation of the movement of the oscillation phenomenon in the differential surge-tank for the position of load there are indicated for the regulating to a constant output two stability conditions for the required surge-tank section and a further condition for the greatest output respectively for the greatest frictional loss in the gallery at the end of the load for the oscillation course. Then follows a relation for the smallest cross-section proportion and with that for the smallest still admissible central pipe cross-section. An example shows the application of the results obtained.

Résumé. Comme suite à l'équation de mouvement du phénomène d'oscillations dans la chambre d'eau différentielle pour le cas d'une charge, il y a chez un réglage pour un débit constant deux conditions de stabilité pour la section du château d'eau nécessaire et une autre condition pour le débit de puissance le plus grand respectivement pour la perte de frottement la plus grande

dans la galerie à la fin de la charge pour le cours de l'oscillation amortie. Après cela suit une relation pour la proportion la plus petite de la section et avec cela pour la section la plus petite encore admissible du tube central. Un exemple montre l'application des résultats obtenus.

1. Einleitung.

Zur Ermittlung der Schwingungsvorgänge im Differentialwasserschloß wurden vom Verfasser bereits ein graphisches¹ und ein analytisches² Näherungsverfahren angegeben. Sie gestatten die Bestimmung der Spiegelstände im Becken und Zentralrohr sowie der Wassergeschwindigkeit im Stollen für jeden Zeitpunkt des Schwingungsverlaufes sowohl für konstante Wasserentnahme als auch bei Regelung auf konstante Leistung der Turbinen. Die Stabilitätsverhältnisse im Differentialwasserschloß wurden jedoch bisher noch keiner eingehenden Untersuchung unterzogen, obwohl bei Regelung auf konstante Leistungsabgabe stehende oder angefachte Schwingungen des Wasserschloßspiegels auftreten können. Es soll deshalb Aufgabe der nachstehenden Stabilitätsbetrachtungen sein, auch für diesen Wasserschloßtyp brauchbare Stabilitätskriterien zu finden, wie sie bereits für ungedämpfte³, gedämpfte⁴ und gekoppelte⁵ Wasserschlosser vorhanden sind.

2. Die Differentialgleichung des Schwingungsvorganges.

Für Belastungsfälle, die im folgenden nur untersucht werden sollen, folgt aus den drei Bestimmungsgleichungen, nämlich der Durchflußgleichung

$$q = f v + F_1 \frac{dz_1}{dt} + F_2 \frac{dz_2}{dt}, \quad (1)$$

der Beschleunigungsgleichung

$$\frac{L}{g} \frac{dv}{dt} = z_1 - \alpha v^2 + \alpha_1 \left(\frac{F_1}{f} \right)^2 \left(\frac{dz_1}{dt} \right)^2 \quad (2)$$

und der Leistungsgleichung

$$C_e = q (H_0 - z_2) \quad (3)$$

die Bewegungsgleichung des Schwingungsvorganges

$$F_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} + F_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} - \frac{\alpha g}{L f} \left[F_1^2 \left(\frac{dz_1}{dt} \right)^2 + F_2^2 \left(\frac{dz_2}{dt} \right)^2 \right] - \frac{2 \alpha g F_1 F_2}{L f} \frac{dz_1}{dt} \frac{dz_2}{dt} + \frac{2 \alpha g C_e}{L f (H_0 - z_2)} \left(F_1 \frac{dz_1}{dt} + F_2 \frac{dz_2}{dt} \right) - \frac{C_e}{(H_0 - z_2)^2} \frac{dz_2}{dt} + \frac{g f}{L} \left[z_2 - \frac{\alpha C_e^2}{f^2 (H_0 - z_2)^2} \right] = 0, \quad (4)$$

in welcher die bereits in der unter Anm. 2 angeführten Arbeit gewählten Bezeichnungen wieder sinngemäß gelten. Führt man auch hier die Beziehungen

$$z_2 = z_1 + \alpha_1 \left(\frac{F_1}{f} \right)^2 \left(\frac{dz_1}{dt} \right)^2, \quad (5)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{dz_1}{dt} + 2 \alpha_1 \left(\frac{F_1}{f} \right)^2 \frac{dz_1}{dt} \frac{d^2 z_1}{dt^2}, \quad (6)$$

$$\frac{d^2 z_2}{dt^2} = \frac{d^2 z_1}{dt^2} + 2 \alpha_1 \left(\frac{F_1}{f} \right)^2 \left[\frac{dz_1}{dt} \frac{d^3 z_1}{dt^3} + \left(\frac{d^2 z_1}{dt^2} \right)^2 \right] \quad (7)$$

¹ H. Weirich: Graphische Bestimmung der Spiegelbewegungen beim Differentialwasserschloß von Johnson. Ingenieur-Arch. 18, 5 (1950).

² H. Weirich: Rechnerische Bestimmung der Spiegelbewegungen beim Differentialwasserschloß von Johnson. Österr. Ingenieur-Arch. 5, 154 (1951).

³ J. Frank und J. Schüller: Schwingungen in den Zuleitungs- und Ableitungskanälen von Wasserkraftanlagen, S. 92ff. Berlin. 1938.

⁴ Wie Anm. 3, S. 106ff. und K. Karas: Rechnerische Ermittlung der Spiegelbewegung gedämpfter Wasserschlosser. Ingenieur-Arch. 12, 395 (1941).

⁵ W. Jurecka: Die Stabilität der Schwingungen in zwei hintereinander liegenden Wasserschlossern. Österr. Ingenieur-Arch. 5, 267 (1951).

in die Gl. (4) ein, läßt aber das Glied $\dot{z}_1 \ddot{z}_1$, das gegenüber \ddot{z}_1^2 sehr klein ist und weiter in

$$H_0 - z_2 = H_0 - z_1 - \alpha_1 \left(\frac{F_1}{f} \right)^2 \left(\frac{dz_1}{dt} \right)^2$$

die durch den Widerstand im Beckenboden bedingte Verlusthöhe $\alpha_1 \left(\frac{F_1}{f} \right)^2 \dot{z}_1^2$ als klein gegenüber dem Gesamtgefälle H_0 unbeachtet, so erhält man unter Vernachlässigung der Terme mit \dot{z}_1 und \ddot{z}_1 von höherer als zweiter Ordnung die Gleichung der Beckenschwingung, beeinflusst durch die Zentralrohrschwingung, von der Form

$$2 \alpha_1 F_2 \left(\frac{F_1}{f} \right)^2 \left(\frac{d^2 z_1}{dt^2} \right)^2 + \left[F + \frac{2 \alpha_1 F_1^2 C_e}{f^2 h} \left(\frac{2 \alpha g F_2}{L f} - \frac{1}{h} \right) \frac{dz_1}{dt} \right] \frac{d^2 z_1}{dt^2} - \frac{g}{L f} (\alpha F^2 - \alpha_1 F_1^2) \left(\frac{dz_1}{dt} \right)^2 + \frac{C_e}{h} \left(\frac{2 \alpha g F}{L f} - \frac{1}{h} \right) \frac{dz_1}{dt} + \frac{g f}{L} z_1 - \frac{\alpha g C_e^2}{L f h^2} = 0 \quad (8)$$

mit

$$F = F_1 + F_2 \quad \text{und} \quad h = H_0 - z_1.$$

Diese Gleichung müßte nun für die weiteren Betrachtungen so umgeformt werden, daß der Koeffizient des Beschleunigungsgliedes gleich eins ist. Dann würde man aber eine weitläufige Formel erhalten, die für den praktischen Gebrauch schlecht geeignet wäre. Man kann jedoch eine übersichtliche Gleichung dann erhalten, wenn man das \ddot{z}_1^2 -Glieder ebenfalls vernachlässigt. Das ist statthaft, denn es ist, wie Versuchsrechnungen an einigen Beispielen zeigten, stets

$$2 \alpha_1 F_2 \left(\frac{F_1}{f} \right)^2 \left(\frac{d^2 z_1}{dt^2} \right)^2 \ll F \frac{d^2 z_1}{dt^2}.$$

Dividiert man die dann verbliebene Gleichung durch den Faktor von \ddot{z}_1 und erweitert alle Glieder mit

$$F - \frac{2 \alpha_1 F_1^2 C_e}{f^2 h} \left(\frac{2 \alpha g F_2}{L f} - \frac{1}{h} \right) \frac{dz_1}{dt},$$

so lautet die Bewegungsgleichung für Belastungsfälle, wenn erneut alle Terme mit \dot{z}_1 bzw. \ddot{z}_1 von höherer als zweiter Ordnung unbeachtet bleiben und wenn nach Einführung des Querschnittsverhältnisses

$$i = \frac{F_2}{F_1 + F_2} = \frac{F_2}{F} \quad (9)$$

für

$$F_1 = (1 - i) F, \quad F_2 = i F \quad (10)$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_1}{dt^2} - \left\{ \frac{g F}{L f} [\alpha - \alpha_1 (1 - i)^2] + \frac{2 \alpha_1 (1 - i)^2 C_e^2}{f^2 h^2} \left[\frac{4 \alpha^2 i g^3 F^2}{L^2 f^2} - \frac{2 \alpha (1 + i) g F}{L f h} + \frac{1}{h^2} \right] \right\} \cdot \\ \cdot \left(\frac{dz_1}{dt} \right)^2 + \left[\frac{C_e}{F h} \left(\frac{2 \alpha g F}{L f} - \frac{1}{h} \right) + \frac{2 \alpha_1 (1 - i)^2 g C_e}{L f h} \left(\frac{\alpha C_e^2}{f^2 h^2} - z_1 \right) \left(\frac{2 \alpha i g F}{L f} - \frac{1}{h} \right) \right] \frac{dz_1}{dt} + \\ + \frac{g f}{L F} z_1 - \frac{\alpha g C_e^2}{L F f h^2} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

3. Stabilitätskriterien für endliche Schwingungen.

Allgemein ergibt die Schwingungsgleichung

$$\ddot{s}_1 + \varphi(t) \dot{s}_1 + \psi(t) s_1 = 0 \quad (12)$$

dann gedämpfte Schwingungen, wenn die mit der Zeit veränderlichen Koeffizienten $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ während des ganzen Schwingungsverlaufes positiv bleiben, also

$$\varphi(t) > 0, \quad \psi(t) > 0 \quad (13)$$

ist⁶.

⁶ Siehe Fußnote 3, S. 93.

Um der ersten Bedingung in (13) zu genügen, muß nach (11) sein

$$\frac{C_e}{F h} \left(\frac{2 \alpha g F}{L f} - \frac{1}{h} \right) + \frac{2 \alpha_1 (1-i)^2 g C_e}{L f h} \left(\frac{\alpha C_e^2}{f^2 h^2} - z_1 \right) \left(\frac{2 \alpha i g F}{L f} - \frac{1}{h} \right) - \left\{ \frac{g F}{L f} [\alpha - \alpha_1 (1-i)^2] + \frac{2 \alpha_1 (1-i)^2 C_e^2}{f^2 h^2} \left[\frac{4 \alpha^2 i g^2 F^2}{L^2 f^2} - \frac{2 \alpha (1+i) g F}{L f h} + \frac{1}{h^2} \right] \right\} \frac{dz_1}{dt} > 0. \quad (14)$$

In dieser Gleichung soll die Spiegelgeschwindigkeit \dot{z}_1 noch mit Verwendung der Durchflußgleichung ausgedrückt werden. Wie bereits in der unter Anm. 2 genannten Arbeit erörtert wurde, verläuft der Bewegungsvorgang im Schloß so, daß bei Belastungszunahme im ersten Augenblick wegen der fehlenden Druckhöhe im Widerstand des Beckens die Spiegelgeschwindigkeit $(\dot{z}_1)_{t=0} = 0$ ist und die gesamte Bedarfswassermenge zunächst dem Zentralrohr entnommen wird. Jedoch schon nach wenigen Sekunden wird der Zentralrohrspiegel so weit abgesunken sein, daß die dadurch entstandene Druckhöhe im Widerstand die Deckung der Fehlwassermenge allein aus dem Becken ermöglicht. Von diesem Zeitpunkt an bleibt bei richtiger Dimensionierung des Widerstandes der Zentralrohrspiegel nahezu konstant auf der Höhe der ersten Extremlage des Beckenspiegels liegen. Die Tatsache nun, daß der Zentralrohrspiegel seine tiefste Lage sehr schnell erreicht, soll auch hier die bereits von R. D. Johnson⁷ gemachte Annahme rechtfertigen, daß der Zentralrohrspiegel während der ganzen Beschleunigungsperiode seine Extremlage einnimmt, das heißt also, daß die gesamte benötigte Wassermenge schon vom Zeitpunkt $t = 0$ an ausschließlich dem Becken entnommen wird. Dann gilt aber die Durchflußgleichung

$$q = f v + F_1 \frac{dz_1}{dt}, \quad (15)$$

woraus zunächst mit Beachtung von (3) und (5)

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{1}{F_1} \left\{ \frac{C_e}{h^2} \left[h + \alpha_1 \left(\frac{F_1}{f} \right)^2 \left(\frac{dz_1}{dt} \right)^2 \right] - v f \right\} \quad (16)$$

folgt, wenn der Term mit \dot{z}_1^4 vernachlässigt wird. Führt man in (16) rechts für \dot{z}_1^2 näherungsweise die Spiegelgeschwindigkeit ein, die sich für $\alpha_1 = 0$ ergibt, so erhält man schließlich mit Beachtung von (10)

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{1}{(1-i) F} \left[\frac{C_e}{h} + \frac{\alpha_1 C_e}{h^2} \left(\frac{C_e^2}{f^2 h^2} - \frac{2 C_e v}{f h} + v^2 \right) - v f \right]. \quad (17)$$

Dieser Ausdruck in (14) eingesetzt, liefert nach einigen Umformungen

$$\left[\frac{C_e}{F h} \left(\alpha k F - \frac{1}{h} \right) + \frac{\alpha_1 k (1-i)^2 C_e}{h} \left(\frac{\alpha C_e^2}{f^2 h^2} - z_1 \right) \left(\alpha k i F - \frac{1}{h} \right) \right] (1-i) f^2 h^4 F - \left\{ \frac{k}{2} [\alpha - \alpha_1 (1-i)^2] F + \frac{2 \alpha_1 (1-i)^2 C_e^2}{f^2 h^2} \left[\alpha^2 k^2 i F^2 - \frac{\alpha k (1+i) F}{h} + \frac{1}{h^2} \right] \right\} \cdot a > 0 \quad (18)$$

mit

$$k = \frac{2 g}{L f}$$

und

$$a = C_e (\alpha_1 C_e^2 + f^2 h^3) - (2 \alpha_1 f h C_e^2 + f^3 h^4) v + \alpha_1 f^2 h^2 C_e v^2.$$

Aus (18) folgt bereits als erstes Stabilitätskriterium die quadratische Gleichung

$$A F^2 + B F + C > 0 \quad (19)$$

⁷ J. Frank: Das Johnson-Wasserschloß. Dtsch. Wasserwirtsch. 27, 128ff. (1932).

für den Gesamtquerschnitt F des Differentialwasserschlosses zu jedem Zeitpunkt des Bewegungsvorganges, worin

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha \alpha_1 k^2 i (1-i)^2 C_e}{f^2 h^2} [(1-i) f^2 h^3 (\alpha C_e^2 - f^2 h^2 z_1) - 2 \alpha C_e a], \\ B &= k (1-i) C_e [\alpha f^2 h^3 - \alpha_1 (1-i)^2 (\alpha C_e^2 - f^2 h^2 z_1)] - \\ &\quad - \left\{ \frac{k}{2} [\alpha - \alpha_1 (1-i)^2] - \frac{2 \alpha \alpha_1 k (1-i)^2 (1+i) C_e^2}{f^2 h^3} \right\} \cdot a, \\ C &= -(1-i) C_e \left[\frac{2 \alpha_1 (1-i) C_e}{f^2 h^4} a + f^2 h^2 \right] \end{aligned}$$

bedeuten. Nach Gl. (19) könnte nun der größte Wert von F , der jedoch noch kleiner bleiben müßte als der gewählte Querschnitt F für abklingende Schwingungen, ermittelt werden, wenn der Zusammenhang von $z_1(t)$ und $v(t)$ bekannt wäre. Da dieser aber zunächst nicht vorliegt, geht man so vor, daß man den ungünstigsten Fall der plötzlichen Belastung der Turbinen aus dem Betriebsstillstand betrachtet. Dann erhält man wegen $z_1 = v = 0$, $h = H_0$ für die Koeffizienten

$$\begin{aligned} A &= \frac{4 \alpha^2 \alpha_1 i (1-i)^2 g^2 C_e^3}{L^2 f^4 H_0^2} [(1-i) f^2 H_0^3 - 2 (\alpha_1 C_e^2 + f^2 H_0^3)], \\ B &= \frac{2 g C_e}{L f} \left\{ \alpha (1-i) [f^2 H_0^3 - \alpha_1 (1-i)^2 C_e^2] - (\alpha_1 C_e^2 + f^2 H_0^3) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \left[\frac{1}{2} [\alpha - \alpha_1 (1-i)^2] - \frac{2 \alpha \alpha_1 (1-i)^2 (1+i) C_e^2}{f^2 H_0^3} \right] \right\}, \\ C &= -(1-i) C_e \left[\frac{2 \alpha_1 (1-i) C_e^2}{f^2 H_0^4} (\alpha_1 C_e^2 + f^2 H_0^3) + f^2 H_0^2 \right] \end{aligned}$$

und damit nach (19) eine untere Schranke für F .

Man kann aber noch einen weiteren Grenzquerschnitt für F finden, wenn die Stabilitätsbedingung (14) nicht für den Zeitpunkt $t=0$, sondern bei der ersten gemeinsamen Extremlage der Spiegel im Becken und Zentralrohr $t=t_1$ untersucht wird. Dabei soll angenommen werden, daß im ungünstigsten Falle beide Spiegel bis zum Beckenboden — dieser liegt um H_B über dem Unterwasserspiegel — absinken. Dann folgt wegen $\dot{z}_1 = 0$, $z_1 = z_{1\max} = H_0 - H_B$ und $h = H_B$ die Ungleichung

$$\frac{C_e}{F H_B} \left(\frac{2 \alpha g F}{L f} - \frac{1}{H_B} \right) + \frac{2 \alpha_1 (1-i)^2 g C_e}{L f H_B} \left(\frac{\alpha C_e^2}{f^2 H_B^2} - H_0 + H_B \right) \left(\frac{2 \alpha i g F}{L f} - \frac{1}{H_B} \right) > 0, \quad (20)$$

aus der sich als weiteres Stabilitätskriterium für den Querschnitt F wiederum eine quadratische Gleichung

$$D F^2 + E F + G > 0 \quad (21)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} D &= 4 \alpha \alpha_1 i (1-i)^2 H_B g^2 C_e \cdot b, \\ E &= 2 L f g C_e [\alpha f^2 H_B^3 - \alpha_1 (1-i)^2 b], \\ G &= -L^2 f^4 H_B^2 C_e \end{aligned} \right\} b = \alpha C_e^2 - f^2 H_B^2 (H_0 - H_B),$$

ergibt. Man erhält jedoch nach (21) für die untere Schranke von F höhere Werte als nach (19).

Setzt man in der Bedingung (19) $i = 0$, so erhält man nach einigen Umformungen die von K. Karas⁸ für das gewöhnliche gedämpfte Wasserschloß angegebene Bedingung für den Querschnitt F , was als wertvolle Kontrolle angesehen werden kann. Ist

⁸ A. a. O. S. 398, Gl. (82).

schließlich auch noch $\alpha_1 = 0$, so ergibt sich das Schüllersche Kriterium⁹ für das ungedämpfte Schloß.

Um nun auch noch der zweiten Bedingung in (13) zu genügen, müssen die beiden letzten Glieder in (11) untersucht werden. Durch Einführung der Schwingungsweite s_1 von der Endspiegellage z_e als Schwingungsachse nehmen diese dieselbe Form

$$\frac{g f}{L F} (z_e + s_1) - \frac{\alpha g C_e^2}{L F f (H_0 - z_e - s_1)^2} \quad (22)$$

an wie beim ungedämpften und gedämpften Wasserschloß. Da nun für gedämpfte Schwingungen der Faktor bei s_1 nach (13) stets positiv sein muß, ergibt sich durch Reihenentwicklung bezüglich s_1 nach K. Karas¹⁰ auch hier als weiteres Stabilitätskriterium

$$f^2 (H_0 - z_e)^4 - \alpha C_e^2 [2 (H_0 - z_e) + 3 s_1] > 0, \quad (23)$$

bzw. für die Leistung

$$C_e < \frac{f (H_0 - z_e)^2}{\sqrt{\alpha [2 (H_0 - z_e) + 3 s_1]}}. \quad (24)$$

Macht man wieder die Annahme, daß die Spiegelabsenkung höchstens bis zum Beckenboden erfolgen darf, so ist

$$s_1 = H_0 - H_B - z_e. \quad (25)$$

Geht man damit und dem Ausdruck für die Leistung

$$C_e = \frac{f}{\sqrt{\alpha}} (H_0 - z_e) \sqrt{z_e}, \quad (26)$$

der sich durch Nullsetzen von (22) mit $z_1 = z_e$ ergibt, in (24) ein, so folgt für die Endspiegellage bzw. den Reibungsverlust im Stollen zu Belastungsende

$$z_e < \frac{1}{12} [7 H_0 - 3 H_B - \sqrt{(5 H_0 - 3 H_B)^2 - 12 H_0 H_B}]. \quad (27)$$

Damit findet man aus (24) mit Beachtung von (25) die noch zulässige Leistungsabgabe bei gedämpftem Schwingungsverlauf und endlichen Schwingungsweiten für jedes H_0 und H_B . So ist z. B. für

$$H_B = 0: \quad z_e < \frac{H_0}{6}, \quad s_1 > \frac{5}{6} H_0, \quad C_e < \frac{5}{6 \sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} f H_0^{3/2}, \quad (28)$$

$$H_B = \frac{2}{3} H_0: \quad z_e < \frac{H_0}{3}, \quad s_1 > 0, \quad C_e < \frac{2}{3 \sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} f H_0^{3/2}. \quad (29)^{11}$$

Da in der Gl. (27) unter der Wurzel eine Differenz steht, würde z_e für den Fall

$$12 H_0 H_B > (5 H_0 - 3 H_B)^2$$

imaginär. Für reelle Werte von z_e darf somit die Wurzel höchstens Null werden, also

$$(5 H_0 - 3 H_B)^2 = 12 H_0 H_B \quad (30)$$

sein. Daraus folgt

$$H_B = \frac{7 - 2 \sqrt{6}}{3} H_0 \quad (31)$$

und nach (27) der größte mögliche Wert für den Reibungsverlust überhaupt

$$z_e < \frac{H_0}{\sqrt{6}}. \quad (32)$$

⁹ Siehe Fußnote 3, S. 104, Gl. (61).

¹⁰ A. a. O. S. 397, Gl. (76).

¹¹ Diese Werte wurden bereits von K. Karas: a. a. O. S. 397, Gl. (78a) und (78b) gefunden.

Mit ihm wird nach (25)

$$s_1 > \frac{9 - 4\sqrt{6}}{3\sqrt{6}} H_0 \quad (33)$$

und nach (24)

$$C_e < \frac{(\sqrt{6} - 1)^2}{\sqrt{6}(7\sqrt{6} - 12)} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} f H_0^{3/2}. \quad (34)$$

Wie man erkennt, fällt bei (29) im Grenzfall die Endspiegellage z_e mit der Höhe des Beckenbodens H_B zusammen, so daß sich $s_1 = 0$ ergibt. Nach (31) und (32) liegt z_e sogar tiefer als H_B , so daß s_1 nach (33) negativ wird. Das bedeutet aber, daß sich in diesen Fällen kein vollständiger Schwingungsvorgang mehr ausbilden kann.

4. Bestimmung des kleinsten Querschnittsverhältnisses i_{\min} .

In der Gl. (19) sind für den Zeitpunkt $t = 0$, ebenso wie in (21) für $t = t_1$, alle Größen außer dem Querschnittsverhältnis i bekannt. Das letztere muß noch gewählt werden. Die Wahl desselben ist aber leicht möglich, wenn man mit Hilfe der von F. Vogt¹² für plötzliche Belastungsvergrößerung bei konstanter Leistungsabgabe gemachten Annahmen und den dafür angegebenen Formeln zunächst einen Kleinstwert i_{\min} bestimmt. Es ist

$$n = \frac{q_a}{q_0} \quad (35)$$

der Belastungsgrad mit q_a als Anfangswassermenge und der zur Erzielung der Leistung C_e erforderlichen Wassermenge beim tiefsten Spiegelstand

$$q_0 = \frac{C_e}{H_B} \quad (36)$$

unter der Annahme, daß die Absenkung wieder höchstens bis zum Beckenboden erfolgen darf. Mit der zugehörigen Stollengeschwindigkeit $v_0 = \frac{q_0}{f}$ und dem Reibungsverlust im Stollen $h_0 = \alpha v_0^2$ ergibt sich die Wasserschloßkennziffer

$$\varepsilon = \frac{L f v_0^2}{g F h_0^2} \quad (37)$$

mit dem zunächst noch unbekannten Schloßquerschnitt F , der aber zunächst mit Beachtung der Stabilitätsbedingung für ein gedämpftes Wasserschloß¹³ gewählt werden soll und später durch die Gl. (19) bzw. (21) zu kontrollieren ist.

Die Kennziffer ε muß aus den von F. Vogt angegebenen Gründen für das Differentialwasserschloß korrigiert werden auf

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{1 - \frac{3}{2} i}, \quad (38)$$

wobei ε_1 aus der Vogtschen Gleichung

$$x_{\max} = 1 + \left[\sqrt{0.5 \varepsilon_1 - 0.275 \sqrt{n}} + \frac{0.1}{\varepsilon_1} - 0.9 \right] \left[1 - \frac{n}{(0.5 \varepsilon_1)^{0.62}} \right] (1 - n) \quad (39)$$

folgt, die aber für den Fall der totalen Belastung aus dem Betriebsstillstand mit $n = 0$ die Form

$$x_{\max} = \sqrt{0.5 \varepsilon_1} + \frac{0.1}{\varepsilon_1} + 0.1 = \frac{H_0 - H_B}{h_0} \quad (39a)$$

annimmt. Mit bekanntem ε aus (37) und ε_1 aus (39a) ergibt sich aber wegen (38) das kleinste Querschnittsverhältnis

$$i_{\min} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \right) \quad (40)$$

¹² Siehe Fußnote 7, S. 129ff.

¹³ Siehe Fußnote 8 oder 3, S. 109, Gl. (77).

und damit nach (10) der kleinste Zentralrohrquerschnitt $F_{2 \min}$, der nicht unterschritten werden darf. Die wirklich ausgeführte Fläche F_2 liegt in der Nähe des Stollenquerschnittes f .

5. Beispiel.

Es sollen die Stabilitätsverhältnisse einer Anlage mit den Ausführungs- und Betriebsgrößen

$$\left. \begin{aligned} L &= 200 \text{ m}, \\ F_1 &= 24.83 \text{ m}^2, \\ F_2 &= 3.47 \text{ m}^2, (2.1 \text{ m } \Phi), \\ f &= 3.80 \text{ m}^2, (2.2 \text{ m } \Phi), \\ H_0 &= 20 \text{ m}, H_B = 16 \text{ m}, \\ \alpha &= 0.0752 \text{ sek}^2/\text{m}, \alpha_1 = 0.599 \text{ sek}^2/\text{m}, \\ q_e &= 10 \text{ m}^3/\text{sek}, v_e = \frac{q_e}{f} = 2.63 \text{ m/sek}, z_e = \alpha v_e^2 = 0.52 \text{ m}, \\ C_e &= q_e (H_0 - z_e) = 194.8 \text{ m}^4/\text{sek} \end{aligned} \right\} F = 28.3 \text{ m}^2, (6 \text{ m } \Phi), i = \frac{F_2}{F} = 0.123,$$

untersucht werden.

Nach (19) findet man für dämpfungssichere Schwingungen für den Gesamtquerschnitt den Wert $F > 7.6 \text{ m}^2$, während sich nach (21) $F > 14.86 \text{ m}^2$ ergibt. Beide Bedingungen sind also erfüllt, weil der ausgeführte Querschnitt $F = 28.3 \text{ m}^2$ beträgt. Die weitere Bedingung (24) ist mit $s_1 = 3.48 \text{ m}$ nach (25) ebenfalls erfüllt. Das betrachtete Differentialwasserschloß ist somit als stabil anzusehen.

Das kleinste Querschnittsverhältnis erhält man mit $q_0 = 12.18 \text{ m}^3/\text{sek}$, $v_0 = 3.2 \text{ m/sek}$, $h_0 = 0.77 \text{ m}$, $\varepsilon = 47.16$, $\varepsilon_1 = 51.6$ nach den Gl. (36), (37) und (39a) aus (40) zu $i_{\min} = 0.0573$ und damit den kleinsten Zentralrohrquerschnitt $F_{2 \min} = 1.62 \text{ m}^2$.

(Eingegangen am 5. Februar 1953.)

Über die symmetrische Rollung.

Von R. Bereis, Wien.

Mit 3 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Es werden jene speziellen ebenen Bewegungen, die beim Rollen einer Kurve auf einer kongruenten und bezüglich der Wälztangente stets symmetrisch liegenden Kurve vorliegen, in bezug auf differentialgeometrische Eigenschaften bis zum vierten Grad untersucht. Insbesondere werden einfache Aussagen über den Ballschen Punkt, die Scheitelkurve und die Burmester-Punkte gemacht.

Summary. The object of the paper is an examination of the differential-geometrical properties to the fourth degree of those special two-dimensional motions arising in rolling a curve on a congruent curve always symmetrically located in respect to the rolling-off tangent. In particular, simple statements are made concerning the Ball point, the vertex curve, and the Burmester points.

Résumé. L'auteur examine les propriétés différentio-géométriques jusqu'au quatrième degré des mouvements spéciaux planes qui se produisent en faisant rouler une courbe sur une courbe congruente toujours arrangée symétriquement par rapport à la tangente de roulement. En particulier, le rapport arrive à de simples constatations concernant le point Ball, la courbe de sommet et les points Burmester.

1. Einleitung.

Jede ebene, nicht rein translatorische Bewegung eines starren Systems Σ kann bekanntlich durch gleitungsloses Abrollen einer Kurve c , der sogenannten Gangpolkurve, auf einer festen Kurve c_0 , der Rastpolkurve, erzeugt werden. Sind c , c_0 insbesondere kongruente Kurven, die im Ablauf der Bewegung stets in symmetrischer

Lage bezüglich der Wälztangente bleiben, so soll kurz von einer symmetrischen Rollung gesprochen werden.

Die genannte Besonderheit des Polkurvenpaares bringt gewisse Vereinfachungen in den kinematischen Verhältnissen mit sich. So kann z. B. die Bahn eines beliebigen Systempunktes T punktweise durch Spiegelung eines festen Punktes T_0 an den Tangenten t der Rastpolkurve c_0 ermittelt werden; T_0 liegt dabei bezüglich c_0 so wie T bezüglich c . Der Mittelpunkt der Strecke $T_0 T$ ist Fußpunkt des aus T_0 auf t

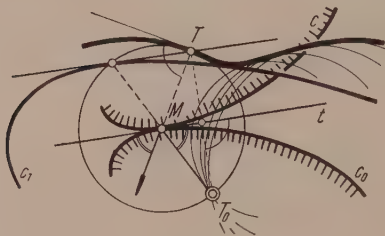


Abb. 1.

fällbaren Lotes und beschreibt die „Fußpunktkurve von c_0 für T_0 “. Aus dieser Fußpunktkurve geht die Bahn von T durch zentrische Verdoppelung von T_0 aus hervor, ist also selbst Fußpunktkurve jener zur Rastpolkurve c_0 ähnlichen Kurve c_1 , die durch dieselbe zentrische Verdoppelung geliefert wird (Abb. 1)¹.

Auf Grund der bekannten Bedeutung des im Wälzpunkt liegenden Momentanzentrums M muß der um M durch T geschlagene Kreis die Bahnkurve in T berühren. Da er aus Symmetriegründen auch den festen Punkt T_0 enthält, so läßt sich die Bahn von T auch als Hüllkurve aller Kreise gewinnen, die den Punkt T_0 gemein haben und deren Mittelpunkte die Rastpolkurve c_0 erfüllen (Abb. 1). Die betrachtete Bahnkurve läßt sich offenbar — zumindest geometrisch — als Wellenfront einer von der Quelle T_0 ausgehenden und an c_0 reflektierten Störung deuten. Faßt man T_0 etwa als Lichtquelle auf, dann stellt die Bahn von T eine sogenannte Antikaustik dar, auf der die reflektierten Lichtstrahlen TM senkrecht stehen (Abb. 1).

Zweck folgender Zeilen ist nun, auf einige weitere differentialgeometrische Eigenschaften der symmetrischen Rollung hinzuweisen. Insbesondere wird unter Verwendung approximierender Bewegungen eine einfache Konstruktion des Ballschen Punktes sowie der Burmester-Punkte angegeben.

2. Wendepol, Wendekreis.

Ersetzt man die symmetrischen Polkurven c , c_0 der betrachteten Bewegung \mathfrak{B} durch ihre (im allgemeinen dreipunktig berührenden) Krümmungskreise k , k_0 im Momentanpol M , so erhält man eine in 2. Ordnung approximierende Ersatzbewegung \mathfrak{B}_2 von \mathfrak{B} , die im Augenblick das gleiche Bahnkrümmungsfeld hervorruft. Die beiden Bewegungen \mathfrak{B}_2 und \mathfrak{B} haben daher auch denselben Wendekreis w und Wendepol W . Da bei der Kreisrollung der Wendepol und die Fixkreismitte stets invers bezüglich des Gangkreises liegen², gilt der

Satz 1: Bei symmetrischer Rollung hat das Ähnlichkeitsverhältnis zwischen Wendekreis und Polkurvenkrümmungskreis den konstanten Wert $1/4$.

3. Scheitelkurve, Ballscher Punkt.

Ersetzt man die symmetrischen Polkurven c , c_0 der Bewegung \mathfrak{B} durch ihre (im allgemeinen vierpunktig berührenden) Schmiegeparabeln p , p_0 im Momentanpol, so erhält man eine in 3. Ordnung approximierende Ersatzbewegung \mathfrak{B}_3 von \mathfrak{B} , die also vierpunktig berührende Ersatzbahnen (zirkuläre Kurven 3. Ordnung) erzeugt. Die Bewegungen \mathfrak{B}_3 und \mathfrak{B} haben demnach im Augenblick auch dieselbe Scheitelkurve f (Ort aller Punkte mit stationärer Bahnkrümmung) und denselben Ballschen Punkt U (Punkt mit vierpunktig berührender Bahntangente). Dieser

¹ L. Burmester: Kinematik, S. 45. Leipzig. 1888.

² R. Bereis: Aufbau einer Theorie der ebenen Bewegung mit Verwendung komplexer Zahlen. Österr. Ingenieur-Arch. 5, 263 (1951).

Punkt U , der seiner Natur nach sowohl dem Wendekreis als auch der Scheitelkurve angehört, fällt hier offensichtlich mit dem Brennpunkt der Gangparabel zusammen, da dieser eine Gerade — die Leitgerade der Rastparabel — beschreibt³. Da U zufolge der symmetrischen Lage der beiden Polparabeln p, p_0 auf dem Poldurchmesser der Rastparabel liegt, dieser Durchmesser aber die Affinnormale der Rastpolkurve abgibt, so gilt

Satz 2: *Bei symmetrischer Rollung ist der Brennpunkt der Schmiegeparabel der Gangpolkurve im Momentanpol Ballscher Punkt; dieser Punkt ist der Restschnitt des Wendekreises und der Affinnormalen der Rastpolkurve.*

Beispiel: Abb. 2 zeigt ein gleichläufiges Zwillingsgetriebe (Gelenkviereck mit gleichen Gegenseiten; Kurbel länger als Koppel). Die Polkurven dieser Koppelbewegung sind bekanntlich kongruente Ellipsen, die die Kurbelenden zu Brennpunkten haben und symmetrisch zur jeweiligen Wälztangente liegen; es liegt mithin eine symmetrische Rollung vor. Der benötigte Krümmungsmittelpunkt K der Gangellipse c mag etwa nach der bekannten Eigenschaft gefunden werden, derzufolge er die zwischen den Hauptachsen liegende Normalenstrecke im selben Verhältnis teilt, wie der zugehörige Ellipsenpunkt M die Tangentenstrecke. Der Wendekreis w wurde dann nach Satz 1 ermittelt, und der auf ihm gelegene Ballsche Punkt U nach Satz 2 im Schnitt mit dem Poldurchmesser O_0M der Rastellipse c_0 , gestützt auf die Tatsache, daß die Affinnormalen eines Kegelschnittes mit seinen Durchmessern identisch sind.

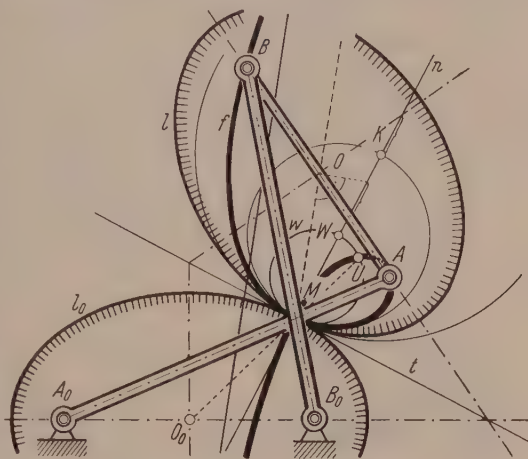


Abb. 2.

Die in Abb. 2 eingetragene Scheitelkurve f — eine rationale Kurve 3. Ordnung (Strophoide) — hat wie üblich ihren Doppelpunkt im Momentanpol M und berührt daselbst Poltangente und -normale. Sie enthält, wie bereits erwähnt, den Ballschen Punkt U und naturgemäß auch die Kurbelenden A und B , die ja Kreise beschreiben. Durch Inversion von M aus wird die Scheitelkurve f in eine gleichseitige Hyperbel transformiert und kann auch umgekehrt so konstruiert werden⁴.

Ersetzt man das Polkurvenpaar c, c_0 im Momentanpol durch ein symmetrisch liegendes hyperoskulierendes Kegelschnittspaar k, k_0 , so durchlaufen, wie aus dem eben behandelten Beispiel hervorgeht, die Brennpunkte des Gangkegelschnittes Kreise — die Leitkreise des Rastkegelschnittes. Sie gehören daher der Scheitelkurve f an. Die Asymptotenrichtung von f wird insbesondere mit der Achsenrichtung der Schmiegeparabel zusammenfallen. Somit gilt

Satz 3: *Bei symmetrischer Rollung erfüllen die Brennpunkte aller Kegelschnitte, die die Gangpolkurve im Momentanpol hyperoskulieren, die Scheitelkurve der Bewegung; die Affinnormale der Gangpolkurve zeigt ihre Asymptotenrichtung an.*

Daß die Scheitelkurve eine rationale zirkuläre Kubik ist, kann aus der bekannten Tatsache gefolgert werden, daß die Brennpunkte der Kegelschnitte einer Büschelschar eine solche Kurve erfüllen⁵.

³ Die Ersatzbewegung \mathcal{B}_3 könnte durch einen symmetrischen Schleifschieber mechanisch verwirklicht werden (Abb. 3).

⁴ Vgl. diesbezüglich R. Bereis: A. a. O., S. 225.

⁵ A. Cazamian: Nouv. Ann. (3) 13, 264—265 (1894). Note sur la strophoide.

4. Burmester-Punkte.

Ersetzt man die symmetrischen Polkurven c, c_0 der Bewegung \mathfrak{B} durch ihre (im allgemeinen fünfpunktig berührenden) Schmiegekegelschnitte l, l_0 im Momentanpol, so erhält man eine in 4. Ordnung approximierende Ersatzbewegung \mathfrak{B}_4 von \mathfrak{B} , die also fünfpunktig berührende Ersatzbahnen (bizirkuläre Kurven 4. Ordnung) erzeugt⁵. Die Bewegungen \mathfrak{B}_4 und \mathfrak{B} haben demnach im Augenblick auch dieselben Burmester-Punkte B_i (Punkte, die in dem betrachteten Zeitpunkt Bahnstellen mit fünfpunktig berührendem Krümmungskreis durchlaufen⁶). Diese vier Punkte B_i fallen offensichtlich mit den vier Brennpunkten des Gangkegelschnittes zusammen, da dieselben nämlich Kreise — die Leitkreise des Rastkegelschnittes — beschreiben; die beiden auf der Hauptachse gelegenen sind reell, die beiden der Nebenachse angehörenden konjugiert komplex.

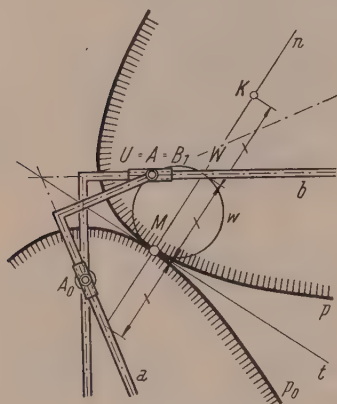


Abb. 3.

Satz 4: Bei symmetrischer Rollung geben die Brennpunkte des Schmiegekegelschnittes der Gangpolkurve im Momentanpol die vier Burmester-Punkte ab.

Im Sonderfall parabolischer Schmiegekegelschnitte l, l_0 stellt der Brennpunkt von l den einzigen eigentlichen Burmester-Punkt dar, während die übrigen ins Unendliche gerückt sind (und zwar in den Achsenfernpunkt der Gangparabel bzw. in die absoluten Kreispunkte). Die Bahn des eigentlichen Burmester-Punktes weist eine fünfpunktig berührende Wendetangente auf.

Abb. 3 zeigt diese Verhältnisse beim symmetrischen Schleifschiebergetriebe, das man in dem zuletzt genannten Fall zur mechanischen Verwirklichung der Ersatzbewegung \mathfrak{B}_4 heranziehen könnte. Der Wendepol liegt naturgemäß auf der Führungsschiene b_0 (Leitgerade der Rastparabel).

⁶ Die Ersatzbewegung \mathfrak{B}_4 könnte durch einen Zwillingenkurbeltrieb mechanisch verwirklicht werden.

⁷ R. Müller: Über die Bewegung eines starren ebenen Systems durch fünf unendlich benachbarte Lagen. Z. Math. Physik 37, 150 (1892).

(Eingegangen am 10. Februar 1953.)

Anwendung der Tensorrechnung auf die Theorie der Rotationsschalen.

Von J. Krettner, München.

Zusammenfassung. In einer ersten Mitteilung hat der Verfasser die Tensorrechnung auf allgemeine krummlinige Koordinaten angewandt. In dieser Arbeit werden die elastostatischen Grundgleichungen, Verschiebungskomponenten und Gleichgewichtsbedingungen für die Mittelfläche einer Rotationsschale und für diese selbst mit den Mitteln der Tensorrechnung in ganz allgemeiner Weise hergeleitet.

Summary. In his first report the author has applied the tensor method of calculation on general, curved co-ordinates, whilst the present report has for its object to derive with the means of the tensor method in a general manner the basic, elasto-static equations, the displacement components, and the conditions of equilibrium for the mean plane of a rotary shell and for the shell itself.

Résumé. Le premier rapport contient l'application du calcul à tenseurs aux coordonnées générales, courbes, tandis que le second rapport sert à dériver d'une façon tout à fait générale à l'aide des moyens du calcul à tenseurs les équations élasto-statiques de base, les composantes

de déplacement et les conditions d'équilibre pour le plan médian d'une enveloppe rotatoire et pour l'enveloppe même.

1. Geometrie auf der Rotationsfläche.

Bekanntlich entsteht eine Rotationsfläche durch Drehen einer ebenen Kurve um eine in ihrer Ebene liegenden Geraden. Wählt man die x^3 -Achse als Drehachse, so erhält man eine Parameterdarstellung durch

$$x^1 = f(u^1) \cos u^2, \quad x^2 = f(u^1) \sin u^2, \quad x^3 = g(u^1).$$

Dabei bedeutet der Parameter u^1 den Winkel der jeweiligen Flächennormalen mit der Drehachse und der Parameter u^2 den Winkel des durch einen bestimmten Flächenpunkt gehenden Meridians mit einer festen Meridianrichtung. Jeder Punkt der Meridiankurve bewegt sich dabei auf einem Kreis vom Radius $r_0 = f(u^1)$. Der zum Flächenpunkt $P(u^1, u^2)$ führende Ortsvektor ist im rechtwinkligen System mit den Einheitsvektoren $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ durch

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2) = f(u^1) \cos u^2 \mathbf{i} + f(u^1) \sin u^2 \mathbf{j} + g(u^1) \mathbf{k}$$

gegeben. Damit ist aber zugleich die Rotationsfläche als Vektorgleichung ihres Ortsvektors \mathbf{r} abhängig von den beiden Parametern u^1 und u^2 gegeben. Für die Tangentenvektoren in Richtung des Meridians und des Parallelkreises ergibt sich, wenn die Ableitungen nach u^1 durch einen Punkt bezeichnet werden:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} = \dot{f} \cos u^2 \mathbf{i} + \dot{f} \sin u^2 \mathbf{j} + \dot{g} \mathbf{k} & \text{mit} & \quad |\mathbf{r}_1| = \sqrt{\dot{f}^2 + \dot{g}^2}, \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} = -f \sin u^2 \mathbf{i} + f \cos u^2 \mathbf{j} & \text{mit} & \quad |\mathbf{r}_2| = f. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Diese beiden Vektoren spannen die Tangentialebene im Flächenpunkt auf und es ist $|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| = f \sqrt{\dot{f}^2 + \dot{g}^2}$. Der im Punkt P der Fläche senkrechte Einheitsvektor hat somit die Gleichung

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{\sqrt{\dot{f}^2 + \dot{g}^2}} [-\dot{g} \cos u^2 \mathbf{i} - \dot{g} \sin u^2 \mathbf{j} + \dot{f} \mathbf{k}] \quad \text{mit} \quad |\mathbf{n}| = 1. \quad (2)$$

Mit diesen drei Vektoren $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 = \mathbf{n}$ hat man also ein der Fläche zugehöriges orthogonales, krummliniges Koordinatensystem mit der Determinante

$$(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{n}) = |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|$$

und der Metrik

$$g_{11} = \dot{f}^2 + \dot{g}^2, \quad g_{22} = f^2, \quad g_{33} = 1 \quad \text{und} \quad g_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (3)$$

gewonnen. Werden die Einheitsvektoren in Richtung des krummlinigen Systems mit \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) bezeichnet, so gilt:

$$\mathbf{r}_1 = \sqrt{\dot{f}^2 + \dot{g}^2} \mathbf{e}_1 = r_1 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{r}_2 = f \mathbf{e}_2 = r_2 \sin \varphi \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{n} = \mathbf{e}_3, \quad (4)$$

wobei r_1 und r_2 die beiden Hauptkrümmungsradien sind. Da

$$\frac{\ddot{f}\dot{g} - \dot{f}\ddot{g}}{(\dot{f}^2 + \dot{g}^2)^{3/2}} = r_1 \quad \text{und} \quad \frac{\dot{g}}{f\sqrt{\dot{f}^2 + \dot{g}^2}} = -\frac{1}{r_2}$$

ist, folgt

$$\dot{f} = r_1 \cos \varphi, \quad \dot{g} = -r_1 \sin \varphi; \quad \ddot{f}\dot{g} - \dot{f}\ddot{g} = r_1^2, \quad \dot{f}\ddot{f} + \dot{g}\ddot{g} = r_1 \dot{r}_1. \quad (5)$$

Das reziproke System ist durch

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}^1 &= \frac{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{n}}{(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{n})} = \frac{1}{r_1^2} \mathbf{r}_1 = \frac{1}{r_1} \mathbf{e}_1, & \mathbf{r}^2 &= \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{r}_1}{(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{n})} = \frac{1}{f^2} \mathbf{r}_2 = \frac{1}{f} \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{r}^3 &= \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{n})} = \mathbf{r}_3 = \mathbf{n} = \mathbf{e}_3 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

gegeben mit der Metrik

$$g^{11} = \frac{1}{r_1^2}, \quad g^{22} = \frac{1}{f^2} = \frac{1}{r_2^2 \sin^2 \varphi}, \quad g^{33} = 1 \quad \text{und} \quad g^{ik} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k. \quad (7)$$

Bezeichnet man mit r_{ik} die Ableitungen des Achsenvektors \mathbf{r}_i nach u_k , so erhält man aus (1), (2) und (5) die Werte:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{11} &= \frac{\dot{\mathbf{r}}_1}{r_1} \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1 \mathbf{n} = r_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{r}_1 \mathbf{n}, & \mathbf{r}_{12} &= \mathbf{r}_{21} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{ctg} \varphi \mathbf{r}_2 = r_1 \cos \varphi \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{r}_{22} &= -r_2 \sin \varphi \left[\frac{\cos \varphi}{r_1} \mathbf{r}_1 + \sin \varphi \mathbf{n} \right] = -r_2 \sin \varphi [\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{n}], \\ \mathbf{r}_{31} &= \mathbf{n}_1 = \frac{1}{r_1} \cdot \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_1, & \mathbf{r}_{32} &= \mathbf{n}_2 = \frac{1}{r_2} \mathbf{r}_2 = \sin \varphi \mathbf{e}_2, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Führt man nun noch die Christoffel-Symbole ein, $\Gamma_{m i k} = \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{r}_{i k}$, $\Gamma_{i k}^m = \mathbf{r}^m \cdot \mathbf{r}_{i k}$, $L_{i k} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{i k}$ und $L_i^k = -\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}^k = g^{k n} L_i n$, so erhält man aus den Gl. (8) die Werte:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{111} &= r_1 \dot{r}_1, & \Gamma_{212} &= \Gamma_{221} = -\Gamma_{122} = r_1 r_2 \sin \varphi \cos \varphi, & \text{alle übrigen } \Gamma_{m i k} &= 0; \\ L_{11} &= -r_1, & L_{22} &= -r_2 \sin^2 \varphi, & \text{und } L_{i k} &= 0 \quad \text{für } i \neq k. \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{\dot{r}_1}{r_1}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r_2 \sin \varphi \cos \varphi}{r_1}, & \Gamma_{31}^1 &= \frac{1}{r_1}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{ctg} \varphi, \\ \Gamma_{32}^2 &= \frac{1}{r_2}, & \Gamma_{11}^3 &= -r_1, & \Gamma_{22}^3 &= -r_2 \sin^2 \varphi, & \text{alle übrigen } \Gamma_{i k}^m &= 0. \\ L_1^1 &= -\frac{1}{r_1}, & L_2^2 &= -\frac{1}{r_2} & \text{und } L_i^k &= 0 \quad \text{für } i \neq k. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Für die Ableitungen der Einheitsvektoren des krummlinigen Systems ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_{11} &= -\mathbf{n}, & \mathbf{e}_{12} &= \cos \varphi \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_{21} &= 0, & \mathbf{e}_{22} &= -[\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{n}], \\ \mathbf{e}_{31} &= \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_{32} &= \sin \varphi \mathbf{e}_2. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

2. Die Rotationsfläche als Mittelfläche einer Rotationsschale.

Die Rotationsfläche $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ soll nun Mittelfläche einer allgemeinen Rotationschale sein. Dem beliebigen Punkt $P(u^1, u^2)$ der Schalenmittelfläche sei ein Vektor $\mathbf{v} = \mathbf{v}(u^1, u^2, u^3)$ zugeordnet, der in bezug auf die \mathbf{e}_i - bzw. \mathbf{r}_i -Achsen durch

$$\mathbf{v} = \bar{v}^i \mathbf{e}_i = v^i \mathbf{r}_i \quad (11)$$

gegeben sein soll. Für den Zusammenhang der beiden Komponenten des Vektors \mathbf{v} ergibt sich durch skalare Multiplikation mit den reziproken Achsenvektoren

$$v^1 = \mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r_1} \bar{v}^1, \quad v^2 = \mathbf{r}^2 \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r_2 \sin \varphi} \bar{v}^2, \quad v^3 = \mathbf{r}^3 \cdot \mathbf{v} = \bar{v}^3. \quad (12)$$

Das Differential des zum Punkte $P(u^1, u^2)$ der Mittelfläche führenden Ortsvektors $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ ist $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_i \cdot du^i$ und es wird

$$du^i = \mathbf{r}^i \cdot d\mathbf{r} \quad (i = 1, 2).$$

Setzt man $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^i} = \mathbf{v}_i$, so ergibt sich für das Differential des ortsabhängigen Vektors \mathbf{v}

$$d\mathbf{v} = \mathbf{v}_i du^i = \left(\frac{\partial v^k}{\partial u^i} \mathbf{r}_k + v^k \mathbf{r}_{ki} \right) du^i.$$

Faßt man nun den Vektor \mathbf{v} als Verschiebungsvektor der Mittelfläche der Schale auf und setzt diese als dünn voraus, so kann man die Änderung von u^3 als von höherer Ordnung klein vernachlässigen und es wird:

$$d\mathbf{v} = \mathbf{v}_i du^i = \mathbf{v}_i \mathbf{r}^i \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^i \mathbf{v}_i = d\mathbf{r} \cdot \mathfrak{B} \quad (i = 1, 2).$$

Der Tensor

$$\mathfrak{B} = \mathbf{r}^i \mathbf{v}_i = \frac{\partial v^k}{\partial u^i} \mathbf{r}^i \mathbf{r}_k + v^k \mathbf{r}^i \mathbf{r}_{ki}$$

ist der Tensor der Verzerrung der Mittelfläche der Schale. Der zum Tensor \mathfrak{B} konjugierte Tensor $\bar{\mathfrak{B}}$ ist bekanntlich

$$\bar{\mathfrak{B}} = \mathbf{v}_i \mathbf{r}^i = \frac{\partial v^k}{\partial u^i} \mathbf{r}_k \mathbf{r}^i + v^k \mathbf{r}_{ki} \mathbf{r}^i.$$

Für den Tensor der reinen Deformation erhält man damit

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2} (\mathfrak{B} + \bar{\mathfrak{B}}) = \frac{1}{2} (\mathbf{r}^i \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i \mathbf{r}^i).$$

Multipliziert man den Tensor der reinen Deformation skalar mit dem Achsenvektor \mathbf{r}_σ , so ergibt sich der Vektor

$$\mathbf{r}_\sigma \cdot \mathfrak{D} = \frac{1}{2} [\mathbf{v}_\sigma + (\mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{v}_i) \mathbf{r}^i].$$

Nochmalige skalare Multiplikation mit dem Vektor \mathbf{r}_ϱ ergibt den skalaren Ausdruck

$$\mathbf{r}_\varrho \cdot (\mathbf{r}_\sigma \cdot \mathfrak{D}) = \frac{1}{2} [\mathbf{r}_\varrho \cdot \mathbf{v}_\sigma + \mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{v}_\varrho] = D_{\varrho\sigma} = D_{\sigma\varrho},$$

der für $\varrho = \sigma$ in

$$\mathbf{r}_\sigma \cdot (\mathbf{r}_\sigma \cdot \mathfrak{D}) = \mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{v}_\sigma = D_{\sigma\sigma}$$

übergeht. Damit ist die Dehnung der Mittelfläche in Richtung \mathbf{r}_σ durch

$$\varepsilon_{\sigma\sigma} = \mathbf{e}_\sigma \cdot (\mathbf{e}_\sigma \cdot \mathfrak{D}) = \frac{1}{|\mathbf{r}_\sigma|^2} (\mathbf{r}_\sigma \cdot (\mathbf{r}_\sigma \cdot \mathfrak{D})) = \frac{D_{\sigma\sigma}}{|\mathbf{r}_\sigma|^2} = \frac{1}{|\mathbf{r}_\sigma|^2} (\mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{v}_\sigma) \quad (13)$$

gegeben.

Für die Winkelausweitung der beiden Richtungen \mathbf{r}_ϱ und \mathbf{r}_σ gilt bei orthogonalen krummlinigen Koordinaten die Beziehung:

$$-\gamma_{\varrho\sigma} = 2 \mathbf{e}_\varrho \cdot (\mathbf{e}_\sigma \cdot \mathfrak{D}) = \frac{2 \mathbf{r}_\varrho \cdot (\mathbf{r}_\sigma \cdot \mathfrak{D})}{|\mathbf{r}_\varrho| |\mathbf{r}_\sigma|} = \frac{2 D_{\varrho\sigma}}{|\mathbf{r}_\varrho| |\mathbf{r}_\sigma|} = \frac{1}{|\mathbf{r}_\varrho| |\mathbf{r}_\sigma|} (\mathbf{r}_\varrho \cdot \mathbf{v}_\sigma + \mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{v}_\varrho). \quad (14)$$

Nun ist nach (11) und (5)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{\partial \bar{v}^1}{\partial u^1} \mathbf{e}_1 + \bar{v}^1 \mathbf{e}_{11} = \left(\frac{\partial \bar{v}^1}{\partial u^1} + \bar{v}^3 \right) \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial u^1} \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial \bar{v}^3}{\partial u^1} - \bar{v}^1 \right) \mathbf{n}, \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{\partial \bar{v}^1}{\partial u^2} \mathbf{e}_1 + \bar{v}^1 \mathbf{e}_{12} = \left(\frac{\partial \bar{v}^1}{\partial u^2} - \cos \varphi \bar{v}^2 \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial u^2} + \cos \varphi \bar{v}^1 + \sin \varphi \bar{v}^3 \right) \mathbf{e}_2 + \\ &\quad + (-\sin \varphi \bar{v}^2) \mathbf{n}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Damit erhält man für die Verzerrungskomponenten der Schalenmittelfläche die Werte:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{r_1} \left[\frac{\partial \bar{v}^1}{\partial u^1} + \bar{v}^3 \right], & \varepsilon_{22} &= \frac{1}{r_2 \sin \varphi} \left[\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial u^2} + \cos \varphi \cdot \bar{v}^1 + \sin \varphi \bar{v}^3 \right], \\ -\gamma_{12} &= \frac{1}{r_2 \sin \varphi} \left[\frac{\partial \bar{v}^1}{\partial u^2} + \frac{r_2 \sin \varphi}{r_1} \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial u^1} - \cos \varphi \bar{v}^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

3. Die Rotationsschale.

Die Punkte der Schale außerhalb der Mittelfläche sollen durch ihren Abstand u^3 von der Mittelfläche der Schale auf der jeweiligen im Punkte $P(u^1, u^2)$ errichteten Normalen zur Mittelfläche festgelegt werden. Man kann somit den zum Schalenpunkt $P(u^1, u^2, u^3)$ führenden Ortsvektor in der Form $\mathfrak{r} = \mathbf{r} + u^3 \mathbf{n}$ angeben. Dann ist:

$$\mathfrak{r}_1 = \mathbf{r}_1 + u^3 \mathbf{n}_1 = r_1 \left(1 + \frac{u^3}{r_1}\right), \quad \mathfrak{r}_2 = \mathbf{r}_2 + u^3 \mathbf{n}_2 = r_2 \left(1 + \frac{u^3}{r_2}\right), \quad \mathfrak{r}_3 = \mathbf{n}. \quad (17)$$

Da die skalaren Produkte

$$\mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_2 \cdot \mathfrak{r}_3 = \mathfrak{r}_3 \cdot \mathfrak{r}_1 = 0$$

sind, liegt also wieder eine dreidimensionale, orthogonale Vektormannigfaltigkeit vor.

Die Deformation der Schale soll nun so sein, daß die mitverformten Normalen zur Mittelfläche auch nach der Deformation wieder senkrecht zur verformten Mittelfläche stehen. Die vektorielle Gleichung der verformten Mittelfläche ist:

$$\bar{\mathfrak{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{v}, \quad (18)$$

ihre Tangentenvektoren also

$$\bar{\mathfrak{r}}_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i \quad (i = 1, 2).$$

Damit wird der normierte Einheitsvektor der Schalenmittelfläche nach der Verformung

$$\bar{\mathbf{n}} = \frac{\bar{\mathbf{r}}_1 \times \bar{\mathbf{r}}_2}{|\bar{\mathbf{r}}_1 \times \bar{\mathbf{r}}_2|} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \mathbf{n})}.$$

Der Ortsvektor $\bar{\mathfrak{r}}$ nach einem Punkt der verformten Schale kann also, wenn man annimmt, daß die Änderung von u^3 von höherer Ordnung klein ist, in der Form

$$\bar{\mathfrak{r}} = \bar{\mathbf{r}} + u^3 \bar{\mathbf{n}}$$

angesetzt werden. Die Tangentenvektoren der verformten Schale sind dann

$$\bar{\mathfrak{r}}_i = \bar{\mathbf{r}}_i + u^3 \bar{\mathbf{n}}_i \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{r}}_3 = \bar{\mathbf{n}}.$$

Nun ist

$$\bar{\mathbf{r}}_1 \times \bar{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2,$$

also

$$|\bar{\mathbf{r}}_1 \times \bar{\mathbf{r}}_2| = \sqrt{g_{11} g_{22} + 2 g_{11} (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{v}_2) + 2 g_{22} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{v}_1)}.$$

Da $\mathbf{r}_k = g_{ik} \mathbf{r}^i$ ist, erhält man durch Einsetzen und Zusammenfassen

$$|\bar{\mathbf{r}}_1 \times \bar{\mathbf{r}}_2| = \sqrt{g_{11} g_{22} [1 + 2 (\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{v}_i)]}.$$

Ferner ist

$$\mathbf{r}_1 = |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| (\mathbf{r}^2 \times \mathbf{n}) \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 = |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| (\mathbf{r}^1 \times \mathbf{n}),$$

also wird bei Vernachlässigung von kleinen Größen höherer Ordnung

$$\bar{\mathbf{n}} = \frac{1}{|\bar{\mathbf{r}}_1 \times \bar{\mathbf{r}}_2|} [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_2 - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_1] \frac{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{|\bar{\mathbf{r}}_1 \times \bar{\mathbf{r}}_2|} = [\mathbf{n} + (\mathbf{r}^2 \times \mathbf{n}) \times \mathbf{v}_2 - (\mathbf{r}^1 \times \mathbf{n}) \times \mathbf{v}_1].$$

Wendet man auf die dreifachen Vektorprodukte den Entwicklungssatz an, so erhält man schließlich:

$$\bar{\mathbf{n}} = [1 - (\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{v}_i)] [\mathbf{n} + (\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{v}_i) \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_i) \mathbf{r}^i] = \mathbf{n} + \mathbf{w}. \quad (19)$$

Dabei wurde

$$\mathbf{w} = -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_i) \mathbf{r}^i = -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_i) g^{ik} \mathbf{r}_k = w^k \mathbf{r}_k$$

gesetzt.

a) Der Verschiebungsvektor eines Schalenpunktes.

Durch Verschieben des Punktes $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ der Mittelfläche in den Punkt $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{v}$ der verformten Mittelfläche geht der Schalenpunkt $\mathbf{x} = \mathbf{r} + u^3 \mathbf{n}$ in den Punkt $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{r}} + u^3 \bar{\mathbf{n}}$ der verformten Schale über. Es ist

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{r} + u^3 \mathbf{n} + \mathbf{v} + u^3 \mathbf{w} = \mathbf{x} + \mathbf{v} + u^3 \mathbf{w},$$

also ist die Verschiebung des Schalenpunktes durch den Vektor $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + u^3 \mathbf{w}$ gegeben. Setzt man den Vektor \mathbf{v} in der Form $\mathbf{v} = v^k \mathbf{r}_k$ an, so ist

$$v_1 = -\frac{\partial v^3}{\partial u^1} \mathbf{r}_k + v^k \mathbf{r}_{k1}$$

und da $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_k = 0$ für $k = 1, 2$ und 1 für $k = 3$ sowie $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_i = 0$ ist, hat der Verschiebungsvektor schließlich den Wert:

$$\mathbf{v}' = \left[v^k - u^3 \left(\frac{\partial v^3}{\partial u^i} + v^n L_{ni} \right) g^{ik} \right] \mathbf{r}_k = v'^k \mathbf{r}_k. \quad (20)$$

Damit sind die Verschiebungskomponenten des Schalenpunktes \mathbf{x} durch jene des auf der gleichen Normalen liegenden Punktes \mathbf{r} der Schalenmittelfläche ausgedrückt.

Bezieht man den Verschiebungsvektor auf das System der Einheitsvektoren \mathbf{e}_k des krummlinigen Systems, setzt man den Vektor \mathbf{v} also in der Form $\mathbf{v} = v^k \mathbf{e}_k$ an, so ergibt sich

$$\bar{\mathbf{v}}' = \left[\bar{v}^k - u^3 \left(\frac{\partial \bar{v}^3}{\partial u^i} + \frac{\bar{v}^n}{|\mathbf{r}_n|} L_{ni} \right) |\mathbf{r}_k| g^{ik} \right] \mathbf{e}_k. \quad (21)$$

Die Verschiebungskomponenten des Schalenpunktes \mathbf{x} sind damit:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}'^1 &= \bar{v}^1 - u^3 \left(\frac{\partial \bar{v}^3}{\partial u^1} + \frac{\bar{v}^1}{|\mathbf{r}_1|} L_{11} \right) \frac{1}{|\mathbf{r}_1|} = \bar{v}^1 - u^3 \left(\frac{\partial \bar{v}^3}{\partial u^1} - \bar{v}^1 \right) \frac{1}{r_1}, \\ \bar{v}'^2 &= \bar{v}^2 - u^3 \left(\frac{\partial \bar{v}^3}{\partial u^2} + \frac{\bar{v}^2}{|\mathbf{r}_2|} L_{22} \right) \frac{1}{|\mathbf{r}_2|} = \bar{v}^2 - u^3 \left(\frac{\partial \bar{v}^3}{\partial u^2} - \sin \varphi \bar{v}^2 \right) \frac{1}{r_2 \sin \varphi}, \\ \bar{v}'^3 &= v^3. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Man erkennt, daß der Zuwachs linear in u^3 ist und daß \bar{v}'^3 von u^3 nicht abhängt.

b) Die Verzerrungskomponenten der Schale.

Durch die infinitesimale Verschiebung $\mathbf{v} = \mathbf{v}(u^1, u^2, u^3)$ geht der Schalenpunkt $\mathbf{x} = \mathbf{r} + u^3 \mathbf{n}$ in den Punkt $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{r}} + u^3 \bar{\mathbf{n}}$ der verformten Schale über. Für den vektoriellen Abstand zweier benachbarter Punkte der verformten Schale erhält man

$$d\bar{\mathbf{x}} = d\bar{\mathbf{r}} + u^3 d\bar{\mathbf{n}} + \bar{\mathbf{n}} du^3 = d\mathbf{r} + d\mathbf{v} + u^3 (d\mathbf{n} + d\mathbf{w}) + \mathbf{n} du^3 + \mathbf{w} du^3.$$

Nun ist

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{r} + u^3 d\mathbf{n} + \mathbf{n} du^3,$$

also

$$d\bar{\mathbf{x}} = d\mathbf{x} + d\mathbf{v} + u^3 d\mathbf{w} + \mathbf{w} du^3.$$

Setzt man $d\mathbf{x} = |d\mathbf{x}| \mathbf{e}$, $\mathfrak{B} = \mathbf{r}^i v_i$ und $\mathfrak{W} = \mathbf{r}^i w_i$, so wird:

$$d\bar{\mathbf{x}} = |d\mathbf{x}| [\mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \mathfrak{B} + u^3 (\mathbf{e} \cdot \mathfrak{W}) + \mathbf{e} (\mathbf{r}^3 \cdot \mathbf{w})]$$

und man erhält für den absoluten Betrag des Abstandes

$$\begin{aligned} |d\bar{\mathbf{x}}| &= |d\mathbf{x}| \sqrt{1 + 2\mathbf{e} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathfrak{B}) + 2u^3 \mathbf{e} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathfrak{W}) + 2\mathbf{e} \cdot [\mathbf{e} \cdot (\mathbf{r}^3 \cdot \mathbf{w})]} \\ &\approx |d\mathbf{x}| \{1 + \mathbf{e} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathfrak{B}) + u^3 \mathbf{e} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathfrak{W}) + \mathbf{e} \cdot [\mathbf{e} \cdot (\mathbf{r}^3 \cdot \mathbf{w})]\}. \end{aligned}$$

Die Dehnung der Schale in Richtung e ist somit

$$\varepsilon' = \frac{|d\bar{x}| - |d\bar{x}|}{|d\bar{x}|} = \frac{|d\bar{x}|}{|d\bar{x}|} - 1 = e \cdot (e \cdot \mathfrak{B}) + u^3 e \cdot (e \cdot \mathfrak{B}) + e \cdot [e \cdot (\mathfrak{r}^3 \cdot w)] \\ = e \cdot e \cdot [\mathfrak{B} + u^3 \mathfrak{B} + (\mathfrak{r}^3 w)] = e \cdot e \cdot \Phi.$$

Der Tensor $\Phi = \mathfrak{B} + u^3 \mathfrak{B} + (\mathfrak{r}^3 w)$ ist der Tensor der Verzerrung der Schale. Wie im Falle der Schalenmittelfläche erhält man durch Hinzunahme des konjugierten Tensors $\bar{\Phi} = \bar{\mathfrak{B}} + u^3 \bar{\mathfrak{B}} + (w \mathfrak{r}^3)$ den Tensor \mathfrak{D}' der reinen Deformation der Schale

$$\mathfrak{D}' = \frac{1}{2} (\Phi + \bar{\Phi}) = [(\mathfrak{B} + \bar{\mathfrak{B}}) + u^3 (\mathfrak{B} + \bar{\mathfrak{B}}) + \mathfrak{r}^3 w + w \mathfrak{r}^3]. \quad (23)$$

Die Komponenten des Tensors sind somit

$$\varepsilon_{\sigma\sigma'} = e_{\sigma} \cdot (e_{\sigma'} \cdot \mathfrak{D}') = \frac{1}{|\mathfrak{r}_{\sigma}|^2} \mathfrak{r}_{\sigma} \cdot (\mathfrak{r}_{\sigma'} \cdot \mathfrak{D}') = \frac{1}{|\mathfrak{r}_{\sigma}|^2} D_{bb'} \quad \text{und} \quad -\gamma_{\sigma\sigma'} = \frac{1}{|\mathfrak{r}_{\sigma}| |\mathfrak{r}_{\sigma'}|} 2 D_{e\sigma'}. \quad (24)$$

Dabei ist

$$D'_{\sigma\sigma} = (\mathfrak{r}_{\sigma} \cdot v_{\sigma}) + u^3 (\mathfrak{r}_{\sigma} \cdot w_{\sigma}) + (\mathfrak{r}_{\sigma} \cdot \mathfrak{r}^3) (\mathfrak{r}_{\sigma} \cdot w), \\ 2 D'_{e\sigma} = \mathfrak{r}_{\sigma} \cdot v_e + \mathfrak{r}_e \cdot v_{\sigma} + u^3 [\mathfrak{r}_{\sigma} \cdot w_e + \mathfrak{r}_e \cdot w_{\sigma}] + (\mathfrak{r}_e \cdot \mathfrak{r}^3) (\mathfrak{r}_{\sigma} \cdot w) + (\mathfrak{r}_{\sigma} \cdot \mathfrak{r}^3) (\mathfrak{r}_e \cdot w).$$

Da

$$w = - (n \cdot v_i) g^{ik} r_k$$

ist, wird

$$n \cdot w = - \frac{\partial v^3}{\partial u^3} = 0$$

und damit

$$n \cdot w_k + n_k \cdot w = 0 \quad (k = 1, 2).$$

Es ist also $D_{33}' = 0$ und damit $\varepsilon_{33}' = 0$, das heißt die Dehnung in Richtung der Flächennormalen ist Null. Ferner wird auch $D_{13}' = 0$ und $D_{23}' = 0$. Drei der Deformationskomponenten sind damit Null, die übrigen drei bestimmen also einen ebenen Spannungszustand. Es ist

$$\left. \begin{aligned} D_{11}' &= \left(1 + \frac{u^3}{r_1}\right) (r_1 \cdot v_1 + u^3 r_1 \cdot w_1), \\ D_{22}' &= \left(1 + \frac{u^3}{r_2}\right) (r_2 \cdot v_2 + u^3 r_2 \cdot w_2), \\ 2 D_{12}' &= \left(1 + \frac{u^3}{r_1}\right) (r_1 \cdot v_2 + u^3 r_1 \cdot w_2) + \left(1 + \frac{u^3}{r_2}\right) (r_2 \cdot v_1 + u^3 r_2 \cdot w_1). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Dabei ist nach (15):

$$\begin{aligned} r_1 \cdot v_1 &= r_1 \left(\frac{\partial v^1}{\partial u^1} + \bar{v}^3 \right), \quad r_2 \cdot v_1 = r_2 \sin \varphi \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial u^1}, \\ r_1 \cdot v_2 &= r_1 \left(\frac{\partial \bar{v}^1}{\partial u^1} - \cos \varphi \bar{v}^2 \right), \quad r_2 \cdot v_2 = r_2 \sin \varphi \left(\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial u^2} + \cos \varphi \bar{v}^1 + \sin \varphi \bar{v}^2 \right) \\ r_1 \cdot w_1 &= - \frac{\partial^2 \bar{v}^3}{\partial u^1 \partial u^1} + \frac{\partial \bar{v}^1}{\partial u^1} + \frac{r_1}{r_1} \left(\frac{\partial \bar{v}^3}{\partial u^1} - \bar{v}^1 \right) \\ r_1 \cdot w_1 &= - \frac{\partial^2 \bar{v}^3}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{r_1}{r_2} \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial \bar{v}^3}{\partial u^2} + \sin \varphi \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial u^1} + \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \cos \varphi \bar{v}^2 \\ r_1 \cdot w_2 &= - \frac{r_1}{r_2} \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial \bar{v}^3}{\partial u^2} - \frac{r_1}{r_2} \cos \varphi \bar{v}^2 - \frac{\partial^2 \bar{v}^3}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{\partial \bar{v}^1}{\partial u^2} \\ r_2 \cdot w_2 &= - \frac{\partial^2 \bar{v}^3}{\partial u^2 \partial u^2} + \sin \varphi \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial u^2} + \frac{r_2 \sin \varphi \cos \varphi}{r_1} \left(\bar{v}^1 - \frac{\partial \bar{v}^3}{\partial u^1} \right) \end{aligned}$$

c) Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben.

Es sei \mathfrak{S} der Spannungstensor und \mathfrak{K} die äußere angreifende Kraft. Die Bedingung für das Gleichgewicht in irgendeinem Punkt des Spannungsfeldes ist durch die vektorielle Beziehung $\operatorname{div} \mathfrak{S} + \mathfrak{K} = 0$ gegeben. Wird der Spannungstensor in bezug auf die r_k -Achsen in der Form $\mathfrak{S} = a^{ik} r_i r_k$ angesetzt, so ergibt die Ableitung

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u^e} = \frac{\partial a^{ik}}{\partial u^e} r_i r_k + a^{ik} r_{ie} r_k + a^{ik} r_i r_{ke}.$$

Der Gradient des Spannungstensors hat damit den Wert:

$$\operatorname{grad} \mathfrak{S} = r^e \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u^e} = r^e r_i r_k \left[\frac{\partial a^{ik}}{\partial u^e} + (a^{nk} \Gamma_{ne}^i + a^{in} \Gamma_{ne}^k) \right].$$

Für die Divergenz des Spannungstensors ergibt sich daraus

$$\operatorname{div} \mathfrak{S} = r^e \cdot \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u^e} = \left[\frac{\partial a^{ik}}{\partial u^i} + (a^{nk} \Gamma_{ni}^i + a^{in} \Gamma_{ni}^k) \right] r_k.$$

Setzt man die äußere Kraft in der Form $\mathfrak{K} = p^k r_k$ an, so lauten schließlich die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben

a) in Richtung der Meridiantangente

$$\frac{\partial a^{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial a^{21}}{\partial u^2} + a^{11} (2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) + a^{22} \Gamma_{22}^1 + a^{13} \Gamma_{31}^1 + p^1 = 0,$$

b) in Richtung der Parallelkreistangente

$$\frac{\partial a^{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial a^{22}}{\partial u^2} + a^{12} (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2) + a^{21} \Gamma_{12}^2 + a^{23} \Gamma_{32}^2 + p^2 = 0,$$

c) in Richtung der Flächennormalen

$$\frac{\partial a^{13}}{\partial u^1} + \frac{\partial a^{23}}{\partial u^2} + a^{11} \Gamma_{11}^3 + a^{13} (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) + a^{22} \Gamma_{22}^3 + p^3 = 0.$$

Bezieht man den Spannungstensor \mathfrak{S} und die äußere Kraft \mathfrak{K} auf die Einheitsvektoren des krummlinigen Systems, so wird

$$\mathfrak{S} = \bar{a}^{ik} e_i e_k = \frac{\bar{a}^{ik}}{|r_i| |r_k|} r_i r_k \quad \text{und} \quad \mathfrak{K} = \bar{p}^k e_k = \frac{\bar{p}^k}{|r_k|} r_k = p^k r_k.$$

Zwischen den Komponenten a^{ik} und \bar{a}^{ik} des Spannungstensors bzw. p^k und \bar{p}^k der äußeren Kraft bestehen die Beziehungen

$$\bar{a}^{ik} = |r_i| |r_k| a^{ik} \quad \text{bzw.} \quad \bar{p}^k = |r_k| p^k.$$

Setzt man diese Werte in obige Formeln ein, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\text{a) } \frac{1}{r_1} \frac{\partial \bar{a}^{11}}{\partial u^1} + \frac{1}{r_2 \sin \varphi} \frac{\partial \bar{a}^{21}}{\partial u^2} + \frac{1}{r_2} \operatorname{ctg} \varphi (\bar{a}^{11} - \bar{a}^{22}) + \frac{1}{r_1} \bar{a}^{13} + \bar{p}^1 = 0,$$

$$\text{b) } \frac{1}{r_1} \frac{\partial \bar{a}^{12}}{\partial u^1} + \frac{1}{r_2 \sin \varphi} \frac{\partial \bar{a}^{22}}{\partial u^2} + \frac{1}{r_2} \operatorname{ctg} \varphi (\bar{a}^{12} + \bar{a}^{21}) + \frac{1}{r_2} \bar{a}^{23} + \bar{p}^2 = 0,$$

$$\text{c) } \frac{1}{r_1} \frac{\partial \bar{a}^{13}}{\partial u^1} + \frac{1}{r_2 \sin \varphi} \frac{\partial \bar{a}^{23}}{\partial u^2} - \frac{1}{r_1} \bar{a}^{11} - \frac{1}{r_2} \bar{a}^{22} + \frac{1}{r_2} \operatorname{ctg} \varphi \bar{a}^{13} + \bar{p}^3 = 0.$$

Die \bar{a}^{ik} sind dabei die auf die Längeneinheit bezogenen Schnittkräfte. Werden alle \bar{a}^{i3} Null gesetzt, so erhält man die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben für den Membranspannungszustand der Rotationsschale.

d) Die Gleichgewichtsbedingungen gegen Drehen.

Setzt man den Momentenvektor \mathfrak{M}_i in bezug auf die Achsen des krummlinigen Systems in der Form

$$\mathfrak{M}_i = M^{ik} r_k = \bar{M}^{ik} e_k$$

an, so ergibt die Ableitung

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_i}{\partial u^k} = \frac{\partial M^{ik}}{\partial u^k} r_k + M^{ik} r_{k,q} \quad (k = 1, 2).$$

Aus dem Spannungstensor

$$\mathfrak{S} = a^{ik} r_i r_k = p^i r_i$$

folgt

$$p^i = a^{ik} r_k.$$

Durch vektorielle Multiplikation mit den Achsenvektoren erhält man

$$\begin{aligned} r_1 \times p^1 &= a^{12} (r_1 \times r_2) + a^{13} (r_1 \times n) = (r_1 r_2 n) [a^{12} n - a^{13} r^2] \\ &= r_1 r_2 \sin \varphi \left[a^{12} n - a^{13} \frac{e_2}{r_2 \sin \varphi} \right] = \bar{a}^{12} n - \bar{a}^{13} e_2, \\ r_2 \times p^2 &= a^{21} (r_2 \times r_1) + a^{23} (r_2 \times n) = (r_1 r_2 n) [a^{23} r^1 - a^{21} n] \\ &= r_1 r_2 \sin \varphi \left[a^{23} \frac{e_1}{r_1} - a^{21} n \right] = \bar{a}^{23} e_1 - \bar{a}^{21} n. \end{aligned}$$

Es ist also

$$r_1 \times p^1 + r_2 \times p^2 = \bar{a}^{23} e_i - \bar{a}^{13} e_2 + (\bar{a}^{12} - \bar{a}^{21}) n.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen gegen Drehen bezüglich der drei Achsen lauten somit:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{1}{r_1} \frac{\partial \bar{M}^{11}}{\partial u^1} + \frac{1}{r_2 \sin \varphi} \frac{\partial \bar{M}^{21}}{\partial u^2} + \frac{1}{r_2} \operatorname{ctg} \varphi (\bar{M}^{11} - \bar{M}^{22}) + \bar{a}^{23} = 0, \\ 2. \quad & \frac{1}{r_1} \frac{\partial \bar{M}^{12}}{\partial u^1} + \frac{1}{r_2 \sin \varphi} \frac{\partial \bar{M}^{22}}{\partial u^2} + \frac{1}{r_2} \operatorname{ctg} \varphi (\bar{M}^{12} + \bar{M}^{21}) - \bar{a}^{13} = 0, \\ 3. \quad & -\frac{1}{r_1} \bar{M}^{11} - \frac{1}{r_2} \bar{M}^{22} + (\bar{a}^{12} - \bar{a}^{21}) = 0. \end{aligned}$$

Damit sind alle Gleichungen zur Bestimmung des Spannungs- und Verzerrungszustandes allgemeiner Rotationsschalen hergeleitet.

¹ J. Krettner: Österr. Ingenieur-Arch. VII, (11—21) (1953).

² W. Zerna: Ingenieur-Arch. 17, 223—233, 149—164 (1949).

³ F. Martin: Ingenieur-Arch. 17, 167—186 (1949).

(Eingegangen am 10. März 1953.)

Eigenschwingungen eines Kreisringes mit rechteckigem Querschnitt.

Von W. Gröbner und P. Lesky.

(Mathematisches Seminar der Universität Innsbruck*.)

Mit 1 Textabbildung.

Zusammenfassung. Die Eigenschwingungen eines Kreisringes mit rechteckigem Querschnitt wurden bereits unter Zugrundelegung des ebenen Deformationszustandes von K. Federhofer¹ in klassischer Weise ermittelt. Aber die numerische Auswertung dieser exakten Resultate ist äußerst mühsam. Daher wird hier dasselbe Problem nach einer anderen Methode bearbeitet, die zwar weniger exakt ist, aber mit verhältnismäßig geringem Rechenaufwand zu einer handlichen Formel (20) für die Schwingungsfrequenzen führt. Die hier verwendete Methode ist eine Verallgemeinerung der bekannten Methode von Ritz und beruht auf der direkten Auswertung des Hamiltonschen Prinzips. Sie hat außerdem den Vorteil, daß sie nicht auf den ebenen Deformationszustand beschränkt ist, sondern ohne wesentliche Schwierigkeiten auf das dreidimensionale Problem mit irgendwelchen Randbedingungen angewendet werden kann.

* Mit Benützung einer von Frl. Edith Saffer ausgearbeiteten Dissertation (1950).

¹ Karl Federhofer: Zweidimensionale Theorie der Biegungsschwingungen des Kreisringes mit rechteckigem Querschnitt. S.-B. Akad. Wiss. Wien 144, 561—575 (1935).

Summary. The natural vibrations of an annulus of rectangular cross-section have already been ascertained in a classical manner by K. Federhofer¹ on basis of the even deformation state. But the numerical exploitation of these exact results is extremely wearisome. For this reason, the present report deals with the same problem approaching it according to a different method which though being less exact permits, by way of a relatively slight amount of calculation, to establish a handy formula (20) for the vibration frequencies. The method employed in this connexion is a generalisation of the well-known method of Ritz, and is based on a direct exploitation of the Hamilton principle. Furthermore, this method offers the advantage of not being limited to the even state of deformation, but of being applicable without great difficulties also to the three-dimensional problem with marginal conditions of any kind.

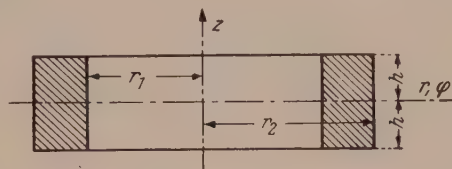
Résumé. Les vibrations propres ou naturelles d'un anneau de cercle à section rectangulaire ont déjà été établies de façon classique par K. Federhofer¹ en se basant sur l'état plan de déformation. Mais l'utilisation numérique de ces résultats exacts est très pénible et pour cette raison le rapport en question adopte une autre méthode qui est moins exacte, il est vrai, mais qui permet d'obtenir une formule commode et maniable (20) pour les fréquences de vibrations à l'aide de calculs relativement simples. La méthode qui est utilisée dans le cas présent est une généralisation de la méthode bien connue de Ritz et se base sur une utilisation directe du principe de Hamilton. En outre, cette méthode présente l'avantage de ne pas être limitée à l'état plan de déformation, car elle se laisse appliquer sans grandes difficultés au problème à trois dimensions à conditions marginales quelconques.

1. Das allgemeine Variationsprinzip.

Das Hamiltonsche Prinzip sagt aus, daß das Integral über die Differenz der potentiellen und der kinetischen Energie eines abgeschlossenen konservativen Systems zwischen zwei Zeitpunkten t_0 und t_1 einen stationären Wert annimmt:

$$\Omega \equiv \int_{t_0}^{t_1} (P - U) dt = \text{stat.} \quad (1)$$

Für einen elastischen (homogenen und isotropen) Kreisring, dessen Querschnitt in der nebenstehenden Abbildung dargestellt ist, führen wir zweckmäßig Zylinderkoordinaten r, φ, z mit dem Koordinatenursprung im Schwerpunkt ein. Eine Verschiebung eines Massenpunktes aus seiner ursprünglichen Lage hat dann die Komponenten u_r, u_φ, u_z , die ihrerseits Funktionen von r, φ, z und der Zeit t sind.



Die kinetische Energie U ist durch das Integral über das Geschwindigkeitsquadrat gegeben:

$$U = \int_{-h}^h dz \int_{r_1}^{r_2} r dr \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right] d\varphi, \quad (2)$$

wo ϱ die Dichte des Materials bedeutet. Die potentielle Energie erhalten wir als Integral über das „elastische Potential“, das wir mit A bezeichnen:

$$P = \int_{-h}^h dz \int_{r_1}^{r_2} r dr \int_0^{2\pi} A d\varphi, \quad (3)$$

$$A = G \left\{ \frac{m-1}{m-2} (\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z)^2 - 2 (\varepsilon_r \varepsilon_\varphi + \varepsilon_\varphi \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_r) + \frac{1}{2} (\gamma_{r\varphi}^2 + \gamma_{\varphi z}^2 + \gamma_{zr}^2) \right\},$$

eine durch die Dehnungen $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z$ und die Scherungen $\gamma_{r\varphi}, \gamma_{\varphi z}, \gamma_{zr}$ bestimmte Größe. G bedeutet den Schubmodul, $\frac{1}{m}$ den Poissonschen Querkontraktionskoeffizienten.

Die Dehnungen und Scherungen lassen sich mittels folgender Formeln durch die Verschiebungen und deren Ableitungen ausdrücken:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \gamma_{r\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right), & \gamma_{\varphi z} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \gamma_{zr} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}.\end{aligned}$$

Führen wir diese Ausdrücke in das elastische Potential ein, so lautet das Hamiltonsche Prinzip:

$$\begin{aligned}\frac{1}{G} \Omega &= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{-h}^h dz \int_{r_1}^{r_2} r dr \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{m-1}{m-2} \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{2}{r^2} u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} u_r^2 \right] + \right. \\ &+ \frac{2}{m-2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_r \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. 2 \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 - \frac{2}{r^2} u_\varphi \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{2}{r} u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} u_\varphi^2 \right] - \\ &\left. - \frac{\varrho}{2G} \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} d\varphi = \text{stat.} \quad (4)\end{aligned}$$

2. Die Randbedingungen.

Den Spannungszustand unseres elastischen Körpers charakterisieren die drei Normalspannungen σ_r , σ_φ , σ_z und die Schubspannungen $\tau_{r\varphi}$, $\tau_{\varphi z}$, τ_{zr} . Diese hängen unter Voraussetzung der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes linear mit den Dehnungen und Scherungen zusammen:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2G \left(\varepsilon_r + \frac{\varepsilon}{m-2} \right), & \tau_{r\varphi} &= G \gamma_{r\varphi}, \\ \sigma_\varphi &= 2G \left(\varepsilon_\varphi + \frac{\varepsilon}{m-2} \right), & \tau_{\varphi z} &= G \gamma_{\varphi z}, \\ \sigma_z &= 2G \left(\varepsilon_z + \frac{\varepsilon}{m-2} \right), & \tau_{zr} &= G \gamma_{zr},\end{aligned}$$

wo $\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z$ gesetzt wurde.

Als Randbedingung stellen wir nun die einer freien Schwingung entsprechende Forderung, daß die Oberfläche des Kreisringes spannungsfrei sei. Das liefert die Bedingungen:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = 0 \text{ für } r = r_1, r_2; \\ \sigma_z &= \tau_{\varphi z} = \tau_{rz} = 0 \text{ für } z = \pm h.\end{aligned}$$

Wiederum die Verschiebungen einführend, erhalten wir die Randbedingungen:

$$\left. \begin{aligned}\frac{m-2}{2G} \sigma_r &= (m-1) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = 0 \text{ für } r = r_1, r_2; \\ \frac{m-2}{2G} \sigma_z &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + (m-1) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = 0 \text{ für } z = \pm h; \\ \frac{1}{G} \tau_{r\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} = 0 \text{ für } r = r_1, r_2; \\ \frac{1}{G} \tau_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 \text{ für } r = r_1, r_2 \text{ und für } z = \pm h; \\ \frac{1}{G} \tau_{\varphi z} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} = 0 \text{ für } z = \pm h.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Diese Bedingungen gelten für alle Werte des betrachteten Zeitintervalls von t ; außerdem sind, um die Gesamtbewegung festzulegen, noch die Anfangslagen und die Anfangsgeschwindigkeiten vorzuschreiben; da wir aber im folgenden nur die Ermittlung der Frequenzen im Auge haben, können wir hier davon absehen, diese Bedingungen explizit aufzuschreiben.

3. Ansatz zur direkten Lösung des Variationsproblems.

Würde man nach dem gewöhnlichen Vorgang das Variationsproblem (4) mit den Nebenbedingungen (5) unmittelbar behandeln und die zugehörigen Euler-Lagrange'schen Gleichungen ableiten, so würde man für die unbekannten Funktionen u_r , u_φ , u_z ein System von partiellen Differentialgleichungen erhalten, das zwar das vorliegende mechanische Problem exakt beschreiben, aber kaum eine Chance für eine erfolgreiche weitere Behandlung zur tatsächlichen Ermittlung der Lösungen bieten würde. Viele Lösungsverfahren, wie z. B. auch dasjenige von Ritz, laufen darauf hinaus, die Differentialgleichung wieder in ein Variationsproblem umzuformen, an welches man dann mit passenden Näherungsverfahren heranrücken kann. Hier wäre dies aber ein Umweg, da wir ja schon ein Variationsproblem vorliegen haben.

Wir werden daher hier das Variationsproblem (4) mit direkter Methode zu lösen versuchen²; das Verfahren besteht darin, daß wir zunächst vollständige Funktionensysteme aufsuchen, welche die (homogenen) Randbedingungen (5) erfüllen. Die Darstellung der Lösungsfunktionen durch diese Funktionensysteme enthält noch unbestimmte, in unserem Falle von t abhängige Koeffizienten, zu deren endgültigen Bestimmung eben die Bedingung, daß das Integral (4) einen stationären Wert annehmen soll, verwendet wird.

Wir setzen zunächst für die gesuchten Funktionen u_r , u_φ , u_z die folgenden trigonometrischen Reihen an:

$$\left. \begin{aligned} u_r &= a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu \varphi + b_\nu \sin \nu \varphi), \\ u_\varphi &= c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (c_\nu \cos \nu \varphi + d_\nu \sin \nu \varphi), \\ u_z &= e_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (e_\nu \cos \nu \varphi + f_\nu \sin \nu \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Die hier auftretenden Koeffizienten a , b , ..., f sind Funktionen von r , z und t . Wenn wir diese Ansätze in die homogenen Randbedingungen (5) einsetzen, so erhalten wir für jedes $\nu = 0, 1, \dots$ die Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} (m-1) \frac{\partial a_\nu}{\partial r} + \frac{\partial e_\nu}{\partial z} + \frac{\nu}{r} d_\nu + \frac{1}{r} a_\nu &= 0 \quad \text{für } r = r_1, r_2; \\ (m-1) \frac{\partial b_\nu}{\partial r} + \frac{\partial f_\nu}{\partial z} - \frac{\nu}{r} c_\nu + \frac{1}{r} b_\nu &= 0 \quad \text{für } r = r_1, r_2; \\ \frac{\partial a_\nu}{\partial r} + (m-1) \frac{\partial e_\nu}{\partial z} + \frac{\nu}{r} d_\nu + \frac{1}{r} a_\nu &= 0 \quad \text{für } z = \pm h; \\ \frac{\partial b_\nu}{\partial r} + (m-1) \frac{\partial f_\nu}{\partial z} + \frac{1}{r} b_\nu - \frac{\nu}{r} c_\nu &= 0 \quad \text{für } z = \pm h; \\ \frac{\partial c_\nu}{\partial r} - \frac{1}{r} c_\nu + \frac{\nu}{r} b_\nu = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial d_\nu}{\partial r} - \frac{1}{r} d_\nu - \frac{\nu}{r} a_\nu &= 0 \quad \text{für } r = r_1, r_2; \\ \frac{\partial a_\nu}{\partial z} + \frac{\partial e_\nu}{\partial r} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial b_\nu}{\partial z} + \frac{\partial f_\nu}{\partial r} = 0 \quad \text{für } r = r_1, r_2 \quad \text{und} \quad z = \pm h; \\ \frac{\partial c_\nu}{\partial z} + \frac{\nu}{r} f_\nu = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial d_\nu}{\partial z} - \frac{\nu}{r} e_\nu &= 0 \quad \text{für } z = \pm h. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

² Diese direkte Methode kann in vielen Problemen der Mechanik angewendet werden und
Ingenieur-Archiv VII, 3.

Nehmen wir einen zur Ebene $z = 0$ symmetrischen Deformationszustand an, dann müssen die a, \dots, f gerade Funktionen von z sein; wir dürfen sie als Polynome in r und z ansetzen und finden z. B. als einfachste nicht triviale (das heißt starre Verschiebungen und Drehungen ausschließende) Lösungen von (7) für $\nu = 0$:

$$a_0 = A(t)(r - r_1)^2(r - r_2)^2 \left(1 - \frac{2z^2}{h^2} + \frac{z^4}{h^4}\right), \quad c_0 = 0,$$

$$e_0 = E(t)(r - r_1)^2(r - r_2)^2 \left(1 - \frac{2z^2}{h^2} + \frac{z^4}{h^4}\right).$$

Wir wollen hier aber eine volle Unabhängigkeit der Koeffizienten a, \dots, f von z voraussetzen, mit anderen Worten uns auf den ebenen Deformations- und Spannungszustand beschränken. Dann vereinfachen sich die obigen Randbedingungen zu den folgenden für $\nu = 1, 2, \dots$

$$\left. \begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 a_\nu}{\partial r^2} + (\nu^2 - 1) a_\nu &= 0, \quad r^2 \frac{\partial^2 b_\nu}{\partial r^2} + (\nu^2 - 1) b_\nu = 0 \quad \text{für } r = r_1, r_2, \\ \frac{\partial a_\nu}{\partial r} &= \frac{\partial b_\nu}{\partial r} = 0 \quad \text{für } r = r_1, r_2, \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

während c_ν und d_ν sich ausdrücken lassen:

$$c_\nu = \frac{r}{\nu} \frac{\partial b_\nu}{\partial r} + \frac{1}{\nu} b_\nu, \quad d_\nu = -\frac{r}{\nu} \frac{\partial a_\nu}{\partial r} - \frac{1}{\nu} a_\nu, \quad c_\nu = f_\nu = 0. \quad (8b)$$

Für $\nu = 0$ findet man bei Ausschaltung von starren Verschiebungen und Drehungen:

$$a_0 = e_0 = 0, \quad \frac{\partial c_0}{\partial r} - \frac{1}{r} c_0 = 0 \quad \text{für } r = r_1, r_2. \quad (9)$$

4. Lösungssysteme für die Randbedingungen.

Die Lösungen von (9), als Polynome in r angesetzt, sind, wie man leicht nachrechnet, die folgenden (mit $\alpha = \frac{r_2}{r_1}$):

$$c_{00} = 2\alpha^2 + 2(\alpha^2 + \alpha + 1) \frac{r^2}{r_1^2} - (\alpha + 1) \frac{r^3}{r_1^3},$$

$$c_{0n} = n(n+1)\alpha \frac{r^n}{r_1^n} - (n^2 - 1)(\alpha + 1) \frac{r^{n+1}}{r_1^{n+1}} + n(n-1) \frac{r^{n+2}}{r_1^{n+2}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Das Polynom $c_{01} = 2\alpha \frac{r}{r_1}$ entspricht einer starren Drehung des Kreisringes und wird deshalb im folgenden weggelassen. Wir können mit diesen Polynomen den Fourier-Koeffizienten c_0 von u_φ in (6) entwickeln, wobei als Koeffizienten unbestimmte Funktionen $\chi_n(t)$ von t auftreten:

$$c_0 = c_{00} \chi_0(t) + c_{02} \chi_2(t) + c_{03} \chi_3(t) + \dots \quad (10)$$

Ähnlich können wir nun auch die Entwicklungen von a_ν , b_ν , c_ν und d_ν durch Polynome, welche die Differentialgleichungen (8) befriedigen, angeben. Da für a_ν und b_ν genau dieselben Bedingungen bestehen, unterscheiden sich ihre Entwicklungen nur durch die von t abhängigen Koeffizienten, so daß wir setzen können:

$$\left. \begin{aligned} a_\nu &= P_{\nu 0} \psi_{\nu 0}(t) + P_{\nu 1} \psi_{\nu 1}(t) + \dots \\ b_\nu &= P_{\nu 0} \chi_{\nu 0}(t) + P_{\nu 1} \chi_{\nu 1}(t) + \dots \end{aligned} \right\} \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (11)$$

hat außerdem den Vorteil, daß man die Tragweite von etwaigen Vernachlässigungen und Vereinfachungen viel besser im Variationsproblem abschätzen und beurteilen kann, als in den Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen desselben Problems. Vgl. die Anwendung dieser Methode auf ein hydrodynamisches Problem: W. Gröbner: Oberflächenwellen von Flüssigkeiten. Ann. Scuola Sup. Pisa, III. Serie 5, 175—191 (1951).

Die Funktionen c_ν und d_ν lassen sich gemäß (8b) daraus berechnen:

$$\left. \begin{aligned} c_\nu &= Q_{\nu 0} \chi_{\nu 0}(t) + Q_{\nu 1} \chi_{\nu 1}(t) + \dots \\ d_\nu &= -Q_{\nu 0} \psi_{\nu 0}(t) - Q_{\nu 1} \psi_{\nu 1}(t) - \dots \end{aligned} \right\} \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (12)$$

mit

$$Q_{\nu n} = \frac{r}{\nu} \frac{dP_{\nu n}}{dr} + \frac{1}{\nu} P_{\nu n}. \quad (13)$$

Die $P_{\nu n}$ und $Q_{\nu n}$ sind Funktionen von r , aber es empfiehlt sich, zur Vereinfachung der später auszuführenden Integrationen folgende Transformation auf die neue Variable x vorzunehmen:

$$x = \frac{r - r_1}{r_2}, \quad \beta = \frac{r_2 - r_1}{r_1} = \alpha - 1. \quad (14)$$

Die Auswertung der Bedingungen (8a) liefert eine unendliche Folge von Polynomen $P_{\nu n}$, von denen wir hier nur die Polynome für $n = 0, 1$ explizit angeben, weil nur diese in den numerischen Berechnungen berücksichtigt worden sind.

$$\left. \begin{aligned} P_{\nu 0} &= [(\nu^2 - 7)\beta^2 - 12\beta - 12]x^4 + [-2(\nu^2 - 9)\beta^3 + 32\beta^2 + 24\beta]x^3 + \\ &\quad + [(\nu^2 - 13)\beta^4 - 24\beta^3 - 12\beta^2]x^2 + [-2(\nu^2 - 13)\beta^4 + 48\beta^3 + 24\beta^2] \frac{1}{\nu^2 - 1}, \\ P_{\nu 1} &= [(\nu^2 - 13)(\nu^2 - 3)\beta^2 - 12(\nu^2 - 1)\beta - 12(\nu^2 - 1)]x^5 + [-2(\nu^2 - 16)(\nu^2 - \\ &\quad - 3)\beta^3 + (\nu^2 - 21)(\nu^2 - 1)\beta^2 + 12(\nu^2 - 1)\beta - 12(\nu^2 - 1)]x^4 + [(\nu^2 - 3)(\nu^2 - \\ &\quad - 21)\beta^4 - 2(\nu^2 - 1)(\nu^2 - 3)\beta^3 + 24(\nu^2 - 1)\beta^2 + 24(\nu^2 - 1)\beta]x^3 + [(\nu^2 - \\ &\quad - 1)(\nu^2 - 21)\beta^4 - 30(\nu^2 - 1)\beta^3 - 12(\nu^2 - 1)\beta^2]x^2 + [-2(\nu^2 - 21)\beta^4 + \\ &\quad + 60\beta^3 + 24\beta^2]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$Q_{\nu n} = \frac{x + 1}{\nu} \frac{dP_{\nu n}}{dx} + \frac{1}{\nu} P_{\nu n}. \quad (16)$$

Hier ist $P_{\nu 0}$ für $\nu = 1$ durch 0 zu ersetzen.

Setzt man diese Ausdrücke in (6) ein, so erhält man die Entwicklungen

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \{P_{\nu 0} [\psi_{\nu 0} \cos \nu \varphi + \chi_{\nu 0} \sin \nu \varphi] + P_{\nu 1} [\psi_{\nu 1} \cos \nu \varphi + \chi_{\nu 1} \sin \nu \varphi] + \dots\}, \\ u_\varphi &= [c_{00} \chi_0 + c_{02} \chi_2 + \dots] + \sum_{\nu=1}^{\infty} \{Q_{\nu 0} [\chi_{\nu 0} \cos \nu \varphi - \psi_{\nu 0} \sin \nu \varphi] + \\ &\quad + Q_{\nu 1} [\chi_{\nu 1} \cos \nu \varphi - \psi_{\nu 1} \sin \nu \varphi] + \dots\}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Die dritte Verschiebungskomponente u_z verschwindet unseren Voraussetzungen entsprechend. Die Größen P und Q sind die durch (15) und (16) definierten Polynome von x im Intervall $0 \leq x \leq \beta$, während ψ und χ noch unbestimmte Funktionen der Zeit t sind. Aber wie auch immer diese noch bestimmt werden, die Ansätze (17) sind bereits so beschaffen, daß die Randbedingungen (5) immer identisch befriedigt werden.

5. Bestimmung der Zeitfunktionen durch das Variationsproblem.

Wir setzen die trigonometrischen Reihen (6) mit Berücksichtigung von $u_z = 0$ und $a_0 = 0$ in das Integral (4) ein und führen die Integrationen über z und über φ aus. Das Resultat ist:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{G} \Omega = & 2 \pi h \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \frac{1}{r} c_0^2 - 2 c_0 c_0' + r (c_0')^2 - \frac{\varrho}{G} (\dot{c}_0)^2 + \right. \\
& + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{m-1}{m-2} \left\{ r (a_\nu')^2 + r (b_\nu')^2 + \frac{1}{r} (a_\nu^2 + b_\nu^2) + \frac{\nu^2}{r} (c_\nu^2 + d_\nu^2) + \frac{2\nu}{r} (a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu) \right\} + \right. \\
& + \frac{2}{m-2} \{ a_\nu a_\nu' + b_\nu b_\nu' + \nu (a_\nu' d_\nu - b_\nu' c_\nu) \} + \frac{\nu^2}{2r} (a_\nu^2 + b_\nu^2) + \frac{1}{2r} (c_\nu^2 + d_\nu^2) + \\
& + \frac{r}{2} (c_\nu')^2 + \frac{r}{2} (d_\nu')^2 + \frac{\nu}{r} (a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu) - \nu (a_\nu d_\nu' - b_\nu c_\nu') - (c_\nu c_\nu' + d_\nu d_\nu') - \\
& \left. \left. - \frac{\varrho}{2G} \{ (\dot{a}_\nu)^2 + (\dot{b}_\nu)^2 + (\dot{c}_\nu)^2 + (\dot{d}_\nu)^2 \} \right\} dr = \text{stat.} \quad (18)
\end{aligned}$$

Hier bedeuten Apostrophe Ableitungen nach r und Punkte Ableitungen nach t .

Führen wir nun noch die Darstellungen (10), (11) und (12) für die Funktionen a_ν , b_ν , c_ν , d_ν ein, so können wir auch die Integrationen über r (bzw. über x) ausrechnen und es bleibt nur mehr das Integral über das Zeitintervall $[t_0, t_1]$ übrig, dessen Integrand nun eine quadratische Form in den unbekannten Zeitfunktionen ψ , χ und deren ersten Ableitungen ist. Diese werden nun nach dem gewöhnlichen Verfahren der Variationsrechnung so bestimmt, daß das Integral einen stationären (in unserem Falle minimalen) Wert annimmt.

Das ergibt als Eulersche Gleichungen des Variationsproblems ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, in denen die Ableitungen zweiter Ordnung der unbekannten Funktionen auftreten. Die Lösung dieser Differentialgleichungen bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten mehr. Da wir uns hier nur für die Frequenzen der Eigenschwingungen interessieren, brauchen wir bloß die charakteristischen Wurzeln dieser Differentialgleichungen zu berechnen.

Diese Rechnung ist praktisch in schrittweisen Annäherungen durchzuführen, derart, daß in den Entwicklungen (10) bis (12) beim ersten Schritt nur die jeweils ersten Glieder berücksichtigt werden, beim zweiten Schritt auch die zweiten Glieder mitgenommen werden usw. Im folgenden werden die ersten beiden Annäherungen berechnet; dabei wird sich zeigen, daß die zweite Annäherung keine wesentliche Änderung im Resultat aufweist, falls β klein ist, das heißt falls die Dicke des Kreisinges gegenüber dem Innenradius genügend klein ist, wie es in den wichtigsten praktischen Fällen ja auch tatsächlich zutrifft.

6. Erste Näherung.

Wir berücksichtigen in den Entwicklungen (10) bis (12) für a_ν , b_ν , c_ν , d_ν jeweils nur die ersten Glieder und führen sie in das Integral (18) ein. Wenn die Integration über r ausgeführt ist, bleibt das folgende Variationsproblem stehen:

$$\frac{1}{G} \Omega \equiv 2 \pi h \int_{t_0}^{t_1} \left\{ A_{00} \dot{\chi}_0^2 - B_{00} \dot{\chi}_0^2 + \sum_{\nu=2}^{\infty} [A_{\nu 0} (\psi_{\nu 0}^2 + \chi_{\nu 0}^2) - B_{\nu 0} (\dot{\psi}_{\nu 0}^2 + \dot{\chi}_{\nu 0}^2)] \right\} dt = \text{stat.} \quad (19)$$

Bei der Ausrechnung der Integrale empfiehlt es sich, die Transformation (14) vorzuschicken und eine Entwicklung nach der als klein vorausgesetzten Größe β vorzunehmen. Man findet so:

$$A_{00} = \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{1}{r} c_{00}^2 - 2 c_{00} c_{00}' + r c_{00}'^2 \right] dr = \frac{3}{5} \beta^5 (2 + 3\beta + \dots),$$

$$B_{00} = \frac{\varrho}{G} \int_{r_1}^{r_2} c_{00}^2 r dr = \frac{\varrho}{G} r_1^2 \cdot 18\beta (2 + 9\beta + \dots),$$

$$\begin{aligned} A_{\nu 0} &= \int_0^\beta \left[\frac{1}{2} \left(\nu - \frac{1}{\nu} \right)^2 \frac{P_{\nu 0}^2}{x+1} + \left(1 - \frac{1}{\nu^2} \right) P_{\nu 0} P_{\nu 0}' + \left(2 + \frac{1}{2\nu^2} \right) (x+1) P_{\nu 0}'^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{1}{\nu^2} \right) (x+1) P_{\nu 0} P_{\nu 0}'' + \frac{1}{\nu^2} (x+1)^2 P_{\nu 0}' P_{\nu 0}'' + \frac{1}{2\nu^2} (x+1)^3 P_{\nu 0}''^2 \right] dx = \\ &= \frac{24}{5} \frac{\beta^5}{\nu^2} \left[72 + 252\beta + (2408 - 94\nu^2) \frac{\beta^2}{7} + (1610 - 235\nu^2) \frac{\beta^3}{7} + \dots \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{\nu 0} &= \frac{\varrho r_1^2}{2G} \int_0^\beta [P_{\nu 0}^2 + Q_{\nu 0}^2] (x+1) dx = \frac{24}{5} \frac{\varrho r_1^2 (\nu^2 + 1)}{G (\nu^2 - 1)^2} \beta^5 \left[60 + 270\beta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3558 + 3244\nu^2 - 82\nu^4}{7(1 + \nu^2)} \beta^2 + \frac{3633 + 2534\nu^2 - 287\nu^4}{7(1 + \nu^2)} \beta^3 + \dots \right], \quad \nu = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Die Eulerschen Gleichungen dieses Variationsproblems sind:

$$\begin{aligned} B_{00} \ddot{\chi}_0 + A_{00} \chi_0 &= 0, \\ B_{\nu 0} \ddot{\psi}_{\nu 0} + A_{\nu 0} \psi_{\nu 0} &= 0, \quad B_{\nu 0} \ddot{\chi}_{\nu 0} + A_{\nu 0} \chi_{\nu 0} = 0. \end{aligned}$$

Die Lösungen sind also periodische Kreisfunktionen mit der Kreisfrequenz:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{A_{00}}{B_{00}}} = \frac{\beta^2}{r_1} \sqrt{\frac{G}{\varrho}} \sqrt{\frac{2 + 3\beta}{30(2 + 9\beta)}}; \\ \omega_\nu &= \sqrt{\frac{A_{\nu 0}}{B_{\nu 0}}} = \frac{\nu^2 - 1}{r_1} \sqrt{\frac{G}{\varrho}} \sqrt{\frac{6(2 + 7\beta)}{5(\nu^2 + 1)(2 + 9\beta)}}, \quad \nu = 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Für $\nu = 1$ findet man durch ähnliche Rechnung:

$$\omega_1 = \frac{\beta^3}{r_1} \sqrt{\frac{G}{\varrho}} \sqrt{\frac{5(2 + 3\beta)}{21(2 + 11\beta)}}.$$

7. Zweite Näherung.

Wir beschränken uns hier auf den Fall $\nu \geq 2$. Wenn wir von den Entwicklungen (11), (12) auch die zweiten Glieder berücksichtigen und in (18) einsetzen, erhalten wir nach Ausführung der Integrationen über x folgendes Variationsproblem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} \Omega &\equiv 2\pi h \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=2}^{\infty} \{ A_{\nu 0} (\psi_{\nu 0}^2 + \chi_{\nu 0}^2) + 2 A_{\nu 1} (\psi_{\nu 0} \psi_{\nu 1} + \chi_{\nu 0} \chi_{\nu 1}) + A_{\nu 2} (\psi_{\nu 1}^2 + \chi_{\nu 1}^2) - \\ &\quad - B_{\nu 0} (\dot{\psi}_{\nu 0}^2 + \dot{\chi}_{\nu 0}^2) - 2 B_{\nu 1} (\dot{\psi}_{\nu 0} \dot{\psi}_{\nu 1} + \dot{\chi}_{\nu 0} \dot{\chi}_{\nu 1}) - B_{\nu 2} (\dot{\psi}_{\nu 1}^2 + \dot{\chi}_{\nu 1}^2) \} dt = \text{stat.} \quad (21) \end{aligned}$$

Die Größen $A_{\nu 0}$ und $B_{\nu 0}$ sind die bereits oben angegebenen; für die neu hinzugekommenen findet man folgende Entwicklungen nach β :

$$\begin{aligned} A_{\nu 1} &= \frac{24}{5} \frac{\nu^2 - 1}{\nu} \beta^5 \left[72 + 288\beta + (3177 - 94\nu^2) \frac{\beta^2}{7} + (2475 - 282\nu^2) \frac{\beta^3}{7} + \dots \right], \\ A_{\nu 2} &= \frac{24}{5} \frac{(\nu^2 - 1)^2}{\nu^2} \beta^5 \left[72 + 324\beta + (4472 - 94\nu^2) \frac{\beta^2}{7} + (3843 - 329\nu^2) \frac{\beta^3}{7} + \dots \right], \\ B_{\nu 1} &= \frac{24}{5} \frac{\varrho r_1^2 (\nu^2 + 1)}{G \nu^2 (\nu^2 - 1)} \beta^5 \left[60 + 300\beta + \frac{8769 + 8000\nu^2 - 164\nu^4}{14(1 + \nu^2)} \beta^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4992 + 3456\nu^2 - 328\nu^4}{7(1 + \nu^2)} \beta^3 + \dots \right], \end{aligned}$$

$$B_{\nu 2} = \frac{24}{5} \frac{\varrho r_1^2 (\nu^2 + 1)}{G \nu^2} \beta^5 \left[60 + 330 \beta + \frac{5343 + 4875 \nu^2 - 82 \nu^4}{7 (1 + \nu^2)} \beta^2 + \right. \\ \left. + \frac{13437 + 9351 \nu^2 - 738 \nu^4}{14 (1 + \nu^2)} \beta^3 + \dots \right].$$

Die Eulerschen Gleichungen des Variationsproblems (21) sind:

$$B_{\nu 0} \ddot{\psi}_{\nu 0} + B_{\nu 1} \ddot{\psi}_{\nu 1} + A_{\nu 0} \psi_{\nu 0} + A_{\nu 1} \psi_{\nu 1} = 0,$$

$$B_{\nu 1} \ddot{\psi}_{\nu 0} + B_{\nu 2} \ddot{\psi}_{\nu 1} + A_{\nu 1} \psi_{\nu 0} + A_{\nu 2} \psi_{\nu 1} = 0$$

und genau dieselben Gleichungen auch für die Funktionen $\chi_{\nu 0}(t)$ und $\chi_{\nu 1}(t)$. Daraus folgt die charakteristische Gleichung für die Kreisfrequenzen ω der Schwingungen:

$$(B_{\nu 0} B_{\nu 2} - B_{\nu 1}^2) \omega^4 - (A_{\nu 2} B_{\nu 0} + A_{\nu 0} B_{\nu 2} - 2 A_{\nu 1} B_{\nu 1}) \omega^2 + (A_{\nu 0} A_{\nu 2} - A_{\nu 1}^2) = 0.$$

Von den beiden Wurzeln ist die erste eine Verbesserung der bei der ersten Näherung gefundenen, während die zweite eine neu hinzugekommene Frequenz einer Oberschwingung darstellt, die bedeutend größer ist als die erste. Man sieht, daß die Verbesserung von ω_ν gegenüber der ersten Näherung (20) sich erst beim Entwicklungsglied von β^2 auswirkt und daher bei kleinem β nicht ins Gewicht fällt:

$$\omega_\nu = \frac{\nu^2 - 1}{r_1} \sqrt{\frac{G}{\varrho}} \sqrt{\frac{6 (2 + 9 \beta)}{5 (\nu^2 + 1) (2 + 11 \beta)}}.$$

Die neu hinzugekommene Frequenz ist:

$$\omega_{\nu'} = \frac{\nu^2 - 1}{r_1 \nu} \sqrt{\frac{G}{\varrho}} \sqrt{\frac{25 (16 + 79 \beta)}{7 (2 + 11 \beta)}}.$$

(Eingegangen am 14. April 1953.)

Zur Beulung versteifter Platten.

Von A. Strasser, Wien.

Mit 5 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Es wird die Stabilität der äquidistanten, zweiachsig versteiften Rechteckplatte unter linear veränderlicher Randbelastung mit Hilfe der Energiemethode untersucht und ein allgemeines Bildungsgesetz der Beulbedingung in Matrixform für beliebige Steifenzahl entwickelt. Weiterhin werden Rekursionsformeln für die Mindeststeifigkeiten bei beliebiger Steifenzahl und konstanter Randbelastung abgeleitet.

Summary. The object of the paper is an examination by means of the energy method of the equidistant double-axially stiffened rectangular plate under a marginal load, linearly changeable, and the development of a general formation law of the bossing condition in matrix shape for any stiffening number. Furthermore, recursion formulae are being derived for the minima of stiffness for any stiffening number and with constant marginal load.

Résumé. A l'aide de la méthode d'énergie l'auteur étudie le problème de la stabilité de la plaque rectangulaire équidistante, renforcée selon deux axes sous une charge marginale variable de façon linéaire, et il développe une loi générale de formation concernant la condition de bosse en forme de matrice pour un nombre quelconque de rigidité. En outre, l'auteur dérive des formules de recursion pour les minima de rigidité à nombre de rigidité quelconque et à charge marginale constante.

1. Ableitung der Beulbedingung.

Bei der Beuluntersuchung der allseitig gelenkig gelagerten Rechteckplatte, die in ihrer Mittelebene durch linear veränderliche Randkräfte belastet und durch äquidistante Längs- und Quersteifen verstärkt ist (Abb. 1), erhalten wir nach der Approximation der Wölbfläche $w = w(x, y)$ durch die Fouriersche Doppelreihe

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \text{ für die gesamte Formänderungsarbeit den Ausdruck}$$

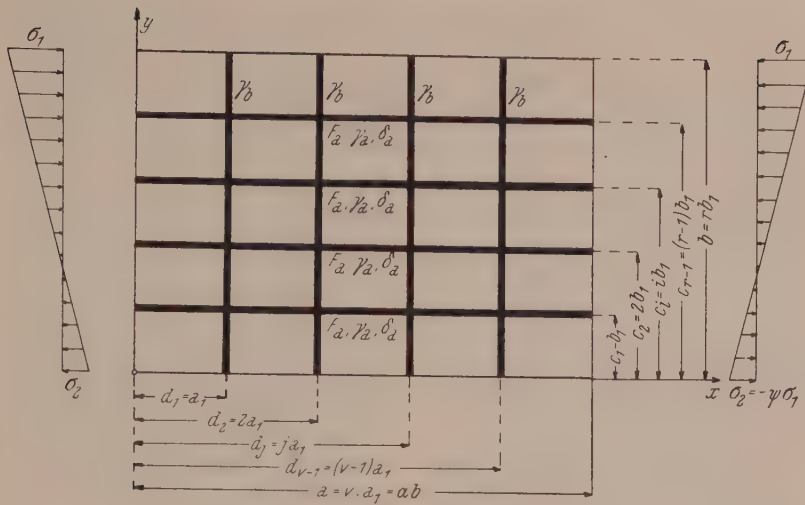


Abb. 1.

$$\begin{aligned}
 A &= A_{iP} + A_{aP} + \sum_{i=1}^{r-1} A_{iL} + \sum_{i=1}^{r-1} A_{aL} + \sum_{j=1}^{v-1} A_{aQ} = \\
 &= \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy + \frac{t}{2} \int_0^a \int_0^b \sigma_{xk} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy + \frac{E J_a}{2} \sum_{i=1}^{r-1} \int_0^a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=c_i}^2 dx + \\
 &\quad + \frac{F_a}{2} \sum_{i=1}^{r-1} \sigma_{xk} \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{y=c_i}^2 dx + \frac{E J_b}{2} \sum_{j=1}^{v-1} \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=d_j}^2 dy = \\
 &= \sum_m \sum_n (m^2 + n^2 \alpha^2)^2 A_{mn} - k \alpha^2 \frac{1+\psi}{2} \sum_m \sum_n m^2 A_{mn}^2 + \\
 &\quad + 2T \frac{1-\psi}{2} \sum_m \sum_n \sum_q m^2 A_{mn} A_{mq} \frac{nq}{(n^2 - q^2)^2} + 2\gamma_a \sum_m m^4 \left(\sum_n A_{mn} \sin \frac{n\pi i}{r} \right)^2 - \\
 &\quad - 2\delta_a k \alpha^2 \sum_{i=1}^{r-1} \left[\psi + (1-\psi) \frac{i}{r} \right] \sum_m m^2 \left(\sum_n A_{mn} \sin \frac{n\pi i}{r} \right)^2 + \\
 &\quad + 2\gamma_b \alpha^3 \sum_n n^4 \left(\sum_m A_{mn} \sin \frac{m\pi j}{v} \right)^2 = 0. \tag{1}
 \end{aligned}$$

Als Abkürzungen wurden wie üblich eingeführt:

$$\left. \begin{aligned}
 D &= \frac{E t^3}{12(1-\mu^2)}, \quad B_a = E J_a, \quad B_b = E J_b, \quad \gamma_a = \frac{B_a}{b D}, \quad \gamma_b = \frac{B_b}{b D}, \\
 \delta_a &= \frac{F_a}{b t}, \quad \Phi_{mn} = (m^2 + n^2 \alpha^2)^2 - m^2 k \alpha^2 \frac{1+\psi}{2}, \quad T = \frac{16 k \alpha^2}{\pi^2}, \\
 \Psi_m &= r \left(m^4 \gamma_a - m^2 k \alpha^2 \frac{1+\psi}{2} \delta_a \right), \quad E = 2100 \text{ t/cm}^2, \quad X_n = v n^4 \gamma_b \alpha^3, \\
 \mu &= 0.3.
 \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

Aus $\frac{\partial A}{\partial A_{mn}} = 0$ erhält man als Beulbedingung ein System linearer und homogener Gleichungen

$$\begin{aligned}
& \left[(m^2 + n^2 \alpha^2)^2 - m^2 k \alpha^2 \frac{1+\psi}{2} \right] A_{mn} + T \frac{1-\psi}{2} m^2 A_{mq} \frac{nq}{(n^2 - q^2)^2} + \\
& + 2 (\gamma_a m^4 - k \alpha^2 \delta_a \psi m^2) \sum_{p=1}^{\infty} A_{mp} \sum_{i=1}^{r-1} \sin \frac{p\pi i}{r} \sin \frac{n\pi i}{r} - \\
& - \delta_a k \alpha^2 m^2 \frac{1-\psi}{2} \frac{4}{r} \sum_{p=1}^{\infty} A_{mp} \sum_{i=1}^{r-1} i \sin \frac{p\pi i}{r} \sin \frac{n\pi i}{r} + \\
& + 2 \gamma_b \alpha^3 n^4 \sum_{o=1}^{\infty} A_{on} \sum_{j=1}^{v-1} \sin \frac{o\pi j}{v} \sin \frac{m\pi j}{v} = 0. \quad (3)
\end{aligned}$$

Die geschlossenen Lösungen der in Gl. (3) auftretenden Summenausdrücke wurden auf verschiedenen Wegen^{1, 2} gefunden und führen für die Beulbedingung zum Ausdruck

$$\begin{aligned}
& (\Phi_{mn} + X_n + \Psi_m) A_{mn} \mp X_n A_{on} \mp \Psi_m A_{mp} + \\
& + \frac{1-\psi}{2} m^2 k \alpha^2 \left[\frac{16}{\pi^2} \frac{nq}{(n^2 - q^2)^2} + \delta_a \frac{4}{r} \frac{\sin \frac{q\pi}{r} \sin \frac{n\pi}{r}}{\left(\cos \frac{q\pi}{r} - \cos \frac{n\pi}{r} \right)^2} \right] A_{mq} = 0. \quad (4)
\end{aligned}$$

$p = 2sr \mp n, \quad o = 2sv \mp m, \quad s = 1, 2, 3 \dots \quad n - q = 1, 3, 5 \dots$

Gl. (4) stellt hinsichtlich linear veränderlicher Belastung und Anzahl der Steifen die allgemeinste Lösung des gegenständlichen Stabilitätsproblems dar und erfährt nur insofern eine Einschränkung, als daß die Steifen in gleichen Abständen angeordnet sind und mittig belastet werden.

2. Schematische Darstellung der Beulbedingung.

Die allgemeine Beulbedingung Gl. (4) reduziert sich für die nur querversteifte Platte und für reinen Druck $\psi = +1$ auf die Form

$$(\Phi_{mn} + X_n) A_{mn} \mp X_n A_{on} + \frac{1-\psi}{2} T m^2 \frac{nq}{(n^2 - q^2)^2} A_{mq} = 0. \quad (5)$$

Wir stellen Gl. (5) in Matrixform dar, wobei die Entwicklung in lineare Gleichungen von der Steifenzahl $(v - 1)$ abhängt. In Abb. 2 sind die Koeffizientendeterminanten für eine Platte mit einer ($v = 2$), zwei ($v = 3$) und drei ($v = 3$) Quersteifen schematisch dargestellt.

Das allgemeine Bildungsgesetz für beliebig viele Quersteifen ist aus der Gestalt der Matrizen leicht zu erkennen. Ausgehend von den schwarz gezeichneten Elementen \blacksquare $m = v, 2v, 3v \dots$ der Hauptdiagonale, füllen die von Null verschiedenen übrigen Elemente die Matrix in einer linksfallenden Reihe aus.

Jene Elemente, welche Beulformen, bei denen Knotenlinien mit dem Ort der Steifen zusammenfallen, darstellen, liegen in der Hauptdiagonale und sind mit \blacksquare gekennzeichnet; sie lauten:

$$\Phi_{mn} = (m^2 + n^2 \alpha^2)^2 - m^2 k \alpha^2 \frac{1+\psi}{2}.$$

Die übrigen mit \square gekennzeichneten Glieder der Hauptdiagonale lauten:

$$(\Phi_{mn} + X_n) = (m^2 + n^2 \alpha^2)^2 - m^2 k \alpha^2 \frac{1+\psi}{2} + v n^4 \gamma_b \alpha^3.$$

¹ C. Torre: Österr. Ingenieur-Arch. **1**, 137 (1946).

² A. Strasser: Diss. Techn. Hochschule Wien 1951.

Für die mit \square gekennzeichneten Elemente ist $-X_n$ wenn linksfallend und $+X_n$ wenn rechtsfallend zu setzen.

Fassen wir vorstehendes Bildungsgesetz für die Quersteifen und das von Torre³ für die nur längsversteifte Platte angegebene zusammen, so können wir für die durch Längs- und Quersteifen verstärkte Platte (Abb. 1) die Beulbildung in Abhängig-

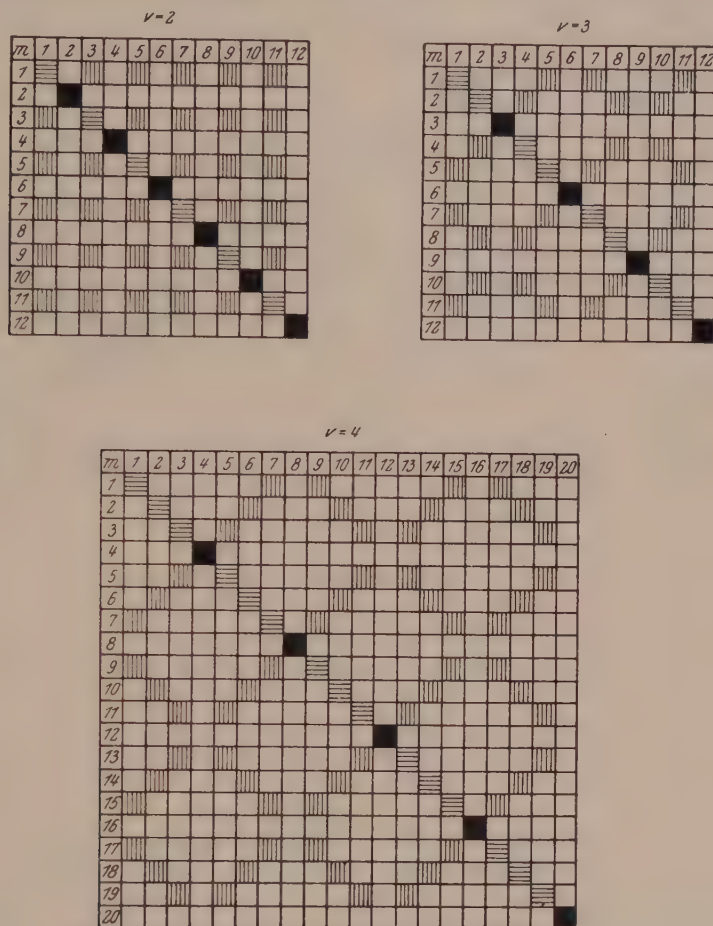


Abb. 2. Schematische Darstellung der Beulbedingung einer Platte mit einer ($v = 2$), zwei ($v = 3$) und drei ($v = 4$) Quersteifen.

keit von der Steifenzahl durch eine Matrizenmatrix angeben, wobei unter einer Matrizenmatrix eine Matrize verstanden sein soll, in der jedes Element wieder eine Matrix darstellt. Während also die v -Zahl des Steifenrostes und damit die Anzahl der Quersteifen die „äußere“ Matrix der Beulbedingung festlegt, bestimmt die r -Zahl und somit die Anzahl der Längsteifen das „innere“ Bild der Beulbedingung.

Als Beispiel sei in Abb. 3 die Matrizenmatrix der durch eine Längsteife $r = 2$ und zwei Quersteifen $v = 3$ ausgesteiften Platte angeführt. Jedes der durch \square gekennzeichneten Elemente stellt also wieder eine vollständige Matrix dar, die für jede beliebige lineare Randbelastung $-1 \leq \psi \leq +1$ gilt. Die mit \blacksquare hervorgehobenen Elemente stellen Beulformen mit Knotenlinien am Orte der Quersteifen dar.

³ C. Torre: Stahlbau 17, 45 (1944).

| m | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| n | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | | | | | | | |

Abb. 3.

3. Beulformeln.

a) Starre Steifen.

Wie in der Matrizenmatrix Abb. 2 und 3 ersichtlich, fehlen in den Elementen mit den Indizes

$$m = m_1 v \quad m_1 = 1, 2, 3 \dots \quad (6)$$

und

$$n = n_1 r \quad n_1 = 1, 2, 3 \dots$$

die Kennwerte der Arbeitsanteile Ψ_m und X_n der Längs- bzw. Quersteifen. Dies bedeutet, daß die Steifen an der Verwölbung der Platte nicht teilnehmen. In der Beulbedingung verbleibt daher nur der Ausdruck $\Phi_{m n}$, aus dem die Beulwerte für die starren Steifen k_{st} durch nachfolgende Entwicklung erhalten werden:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{m n} = \Phi_{m_1 v, n_1 r} &= (m_1^2 v^2 + n_1^2 r^2 \alpha^2)^2 - m_1^2 v^2 \alpha^2 k_{st} \frac{1 + \psi}{2} = 0, \\ k_{st} &= n_1^2 r^2 \left(\frac{m_1 v}{n_1 r \alpha} + \frac{n_1 r \alpha}{m_1 v} \right)^2 \frac{2}{1 + \psi}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die Lage des Minimums von k_{st} ergibt sich aus $dk_{st}/d\alpha = 0$:

$$\min \alpha = \pm \frac{v m_1}{r n_1}, \quad \min k_{st} = 4 n_1 r^2 \frac{2}{1 + \psi}, \quad (7a)$$

$n_1 > 1$ entspricht höheren Beulformen und wird weiters nicht mehr berücksichtigt.

Für die nur querversteifte Platte erhalten wir mit $r = 1$ als Sonderfall

$$k_{st} = \left(\frac{m_1 v}{\alpha} + \frac{\alpha}{m_1 v} \right)^2 \frac{2}{1 + \psi}, \quad (7b)$$

und für die nur längsversteifte Platte mit $v = 1$

$$k_{st} = r^2 \left(\frac{m_1}{r \alpha} + \frac{r \alpha}{m_1} \right)^2 \frac{2}{1 + \psi}. \quad (7c)$$

Für die unversteifte Platte ergibt sich mit $r = v = 1$

$$k_{st} = k = \left(\frac{m_1}{\alpha} + \frac{\alpha}{m_1} \right)^2 \frac{2}{1 + \psi}. \quad (7d)$$

Führen wir in die Gl. (7) die Parameter $m_1 = 1, 2 \dots$ ein, so erhalten wir die Schnittpunkte der Koordinaten der dadurch entstehenden Beulkurven aus den Gleichungen:

$$\alpha_{st}^{sch} = \frac{v}{r} \sqrt{(m_1 + 1) m_1}, \quad k_{st}^{sch} = r^2 \left(4 + \frac{v^2}{r^2} \frac{1}{\alpha^2} \right) \frac{2}{1 + \psi}. \quad (7e)$$

b) Elastische Steifen.

Während bei der Berechnung des Beulwertes für die starren Steifen k_{st} das entsprechende Element der Beuldeterminante von den Arbeitsanteilen der Steifen Ψ_m und X_n frei sein mußte, erhalten wir den Beulwert für die elastischen Steifen aus jenen Elementen, in denen die Arbeitsanteile aller Steifen enthalten sind.

Berücksichtigen wir in der Gl. (4) nur das erste Element, so erhalten wir die im Schrifttum als erste Näherung bezeichnete Gleichung

$$k_{el} = \frac{(1 + \alpha^2)^2 + \gamma_a (r + v \varrho \alpha^3)}{(1 + r \delta_a)^2 \alpha^2} \frac{2}{1 + \psi}. \quad (8)$$

Gl. (8) stimmt mit Gl. (16) von Torre¹ überein. α_{min} der Beulkurven k_{el} erhalten wir aus $dk_{el}/d\alpha = 0$:

$$\alpha_{min}^4 + \frac{\gamma_b v}{2} \alpha_{min}^3 = (1 + r \gamma_a), \quad m = 1. \quad (8a)$$

Lösen wir Gl. (8) nach γ_a auf, so erhalten wir

$$\gamma_a = \frac{k_{el} \alpha^2 (1 + r \delta_a) \frac{1 + \psi}{2} - (1 + \alpha^2)^2}{r + v \varrho \alpha^3}. \quad (8b)$$

Setzen wir $k_{el} = k_{st}$, so erhalten wir aus Gl. (8b) für die zur Erzwingung von Knotenlinien am Orte der Steifen erforderliche Mindeststeifigkeit

$$\min \gamma_a = \frac{r^2 \left(\frac{v}{r \alpha} + \frac{r \alpha}{v} \right)^2 \alpha^2 (1 + r \delta_a) \frac{1 + \psi}{2} - (1 + \alpha^2)^2}{r + v \varrho \alpha^3}. \quad (8c)$$

Die Abszissen der Schnittpunkte der Beulkurven k_{el} berechnen wir aus

$$\alpha_{el, sch}^4 + \gamma_b v \alpha_{el, sch}^3 = (1 + r \gamma_a) m^2 (m + 1)^2. \quad (8d)$$

Beispiel: Wir berechnen die Beulwerte einer Platte, die durch ein in Plattenmitte angeordnetes Steifenkreuz versteift ist und durch konstanten Druck in der Längsrichtung belastet wird.

Mit den in Abschnitt 1 eingeführten Abkürzungen wird:

$$r = v = 2, \quad \psi = +1, \quad \delta_a = 0, \quad \gamma_a = \gamma_b = \gamma.$$

Nach Gl. (7) ist für $\alpha = 0.5$ und $n_1 = 1$

$$\min k_{st} = 4 [2 + 0.5]^2 = 25.$$

Mit $k_{el} = k_{st}$ und $m = 1$ erhalten wir aus Gl. (8c) $\min \gamma = \frac{25}{12}$. Aus Gl. (8a) berechnen wir für $m = 1$

$$\alpha_{min}^4 + \frac{25}{12} \alpha_{min}^3 = \left[1 + \frac{25}{6} \right],$$

$$\alpha_{min} = 1.16 \quad \text{und} \quad k_{el} = 12.02.$$

Den Schnittpunkt der Beulkurven für $m = 1$ und $m = 2$ erhalten wir aus Gl. (8d)

$$\alpha_{el}^{sch} = 1.53, \quad k_{el}^{sch} = 12.94.$$

Ist $\gamma_b = \gamma_{b\min}$, so tritt am Ort der Quersteife eine Knotenlinie auf. Es wird damit $\varrho = \frac{\gamma_b}{\gamma_a} = 0$ und aus Gl. (8a) folgt

$$\alpha_{\min} = m \sqrt[4]{1 + r \gamma_a} = 2 \sqrt[4]{1 + 2 \frac{25}{12}} = 3.01,$$

$$\min k_{el} = m \frac{1 + \sqrt{1 + r \gamma_a}}{1 + r \delta_a} = 2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{50}{12}} \right) = 6.54.$$

4. Mindeststeifigkeiten.

Die geschlossenen Lösungen der Summenausdrücke in Gl. (3) und (4) geben uns die Möglichkeit, die von Fröhlich⁴ entwickelten Gleichungen für die Mindest-

| m | A_{1n} | A_{7n} | A_{9n} | A_{15n} | A_{2n} | A_{6n} | A_{10n} | A_{14n} | A_{3n} | A_{5n} | A_{11n} | A_{13n} | A_{4n} | A_{8n} | A_{12n} |
|-----|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|-------------|-------------|--------------|
| 1 | $\phi_{1n} + \mathcal{I}_{1n}$ | $-\mathcal{I}_{1n}$ | $+\mathcal{I}_{1n}$ | $-\mathcal{I}_{1n}$ | | | | | | | | | | | |
| 7 | $-\mathcal{I}_{1n}$ | $\phi_{7n} + \mathcal{I}_{7n}$ | $-\mathcal{I}_{7n}$ | $+\mathcal{I}_{7n}$ | | | | | | | | | | | |
| 9 | $+\mathcal{I}_{1n}$ | $-\mathcal{I}_{7n}$ | $\phi_{9n} + \mathcal{I}_{9n}$ | $-\mathcal{I}_{9n}$ | | | | | | | | | | | |
| 15 | $-\mathcal{I}_{1n}$ | $+\mathcal{I}_{7n}$ | $-\mathcal{I}_{9n}$ | $\phi_{15n} + \mathcal{I}_{15n}$ | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | $\phi_{2n} + \mathcal{I}_{2n}$ | $-\mathcal{I}_{2n}$ | $+\mathcal{I}_{2n}$ | $-\mathcal{I}_{2n}$ | | | | | | | |
| 6 | | | | | $-\mathcal{I}_{2n}$ | $\phi_{6n} + \mathcal{I}_{6n}$ | $-\mathcal{I}_{6n}$ | $+\mathcal{I}_{6n}$ | | | | | | | |
| 10 | | | | | $+\mathcal{I}_{2n}$ | $-\mathcal{I}_{6n}$ | $\phi_{10n} + \mathcal{I}_{10n}$ | $-\mathcal{I}_{10n}$ | | | | | | | |
| 14 | | | | | $-\mathcal{I}_{2n}$ | $+\mathcal{I}_{6n}$ | $-\mathcal{I}_{10n}$ | $\phi_{14n} + \mathcal{I}_{14n}$ | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | $\phi_{3n} + \mathcal{I}_{3n}$ | $-\mathcal{I}_{3n}$ | $+\mathcal{I}_{3n}$ | $-\mathcal{I}_{3n}$ | | | |
| 5 | | | | | | | | | $-\mathcal{I}_{3n}$ | $\phi_{5n} + \mathcal{I}_{5n}$ | $-\mathcal{I}_{5n}$ | $+\mathcal{I}_{5n}$ | | | |
| 11 | | | | | | | | | $+\mathcal{I}_{3n}$ | $-\mathcal{I}_{5n}$ | $\phi_{11n} + \mathcal{I}_{11n}$ | $-\mathcal{I}_{11n}$ | | | |
| 13 | | | | | | | | | $-\mathcal{I}_{3n}$ | $+\mathcal{I}_{5n}$ | $-\mathcal{I}_{11n}$ | $\phi_{13n} + \mathcal{I}_{13n}$ | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | ϕ_{4n} | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | | | ϕ_{8n} | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_{12n} |

Abb. 4.

steifigkeiten bei einer Längs- bzw. Quersteife für beliebig viele Steifen in Abhängigkeit von der Anzahl der Steifen zu entwickeln.

Wir gehen aus von der schematischen Darstellung der Koeffizientendeterminante der Beulbedingung einer nur querversteiften Platte. Beschränken wir uns auf die ersten fünfzehn Elemente $m = 1 \dots 15$, so nimmt die Koeffizientendeterminante bei drei Quersteifen die in Abb. 4 bereits geordnete Form an. Die einzelnen Unterdeterminanten sind einzeln Null zu setzen und entsprechen der symmetrischen bzw. anti-symmetrischen Beulform und der Beulform mit Knotenlinien am Ort der Steifen.

Die m -Werte 1, 7, 9, 15 der ersten Zeile, $m = 2, 6, 10, 14$ der zweiten Zeile, $m = 3, 5, 11, 13$ der dritten Zeile usw. können sofort aus der schematischen Darstellung Abb. 2 abgelesen werden.

Explizit lauten die Lösungen beispielsweise bei zwei Quersteifen:

⁴ H. Fröhlich: Bau-Ing. 18, 673 (1937).

a) Symmetrische Beulformen.

$$\begin{aligned}
 n=1, \quad m=1, \quad \gamma^{(1)} &= -\frac{1}{3\alpha^3} \frac{1}{\frac{1}{\Phi_{1,1}}}, \\
 n=1, \quad m=1, 5, \quad \gamma^{(2)} &= -\frac{1}{3\alpha^3} \frac{1}{\frac{1}{\Phi_{1,1}} + \frac{1}{\Phi_{5,1}}}, \\
 n=1, \quad m=1, 5, 7, \text{ usw.} \quad \gamma^{(3)} &= -\frac{1}{3\alpha^3} \frac{1}{\frac{1}{\Phi_{1,1}} + \frac{1}{\Phi_{5,1}} + \frac{1}{\Phi_{7,1}}}.
 \end{aligned}$$

b) Antimetrische Beulformen.

$$\begin{aligned}
 n=1, \quad m=2, \quad \gamma_b^{(1)} &= -\frac{1}{3\alpha^3} \frac{1}{\Phi_{2,1}}, \\
 n=1, \quad m=2, 4, \quad \gamma_b^{(2)} &= -\frac{1}{3\alpha^3} \frac{1}{\frac{1}{\Phi_{2,1}} + \frac{1}{\Phi_{4,1}}}.
 \end{aligned}$$

c) Beulformen mit Knotenlinien am Ort der Steifen.

$$\begin{aligned}
 n=1, \quad m=3, \quad \Phi_{3,1} &= 0, \\
 m=3, 6, \quad \Phi_{3,1} \Phi_{6,1} &= 0.
 \end{aligned}$$

Diese Gesetzmäßigkeiten gelten natürlich auch für beliebig viele Quersteifen, so daß wir ganz allgemein für die durch $(v-1)$ Quersteifen verstärkte Platte die Näherungsfolge für die Steifigkeiten in Abhängigkeit von der Felderzahl v wie folgt angeben können:

$$\left. \begin{aligned}
 1. \text{ Näherung: } \gamma_b^{(1)} &= -\frac{1}{v\alpha^3 n^4} \frac{1}{\frac{1}{\Phi_{1,n}}}, \\
 2. \text{ Näherung: } \gamma_b^{(2)} &= -\frac{1}{v\alpha^3 n^4} \frac{1}{\frac{1}{\Phi_{1,n}} + \frac{1}{\Phi_{2v-1,n}}}, \\
 3. \text{ Näherung: } \gamma_b^{(3)} &= -\frac{1}{v\alpha^3 n^4} \frac{1}{\frac{1}{\Phi_{1,n}} + \frac{1}{\Phi_{2v-1,n}} + \frac{1}{\Phi_{2v+1,n}}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Die Rekursionsformel der i -ten Näherung lautet:

$$\gamma_b^{(i)} = \gamma_b^{(i-1)} \frac{1}{1 - \frac{v\alpha^3 n^4 \gamma_b^{(i-1)}}{\Phi_{2sv+1,n}}} \quad (10)$$

und eignet sich gut für die praktische Auswertung.

Bei der nur längsversteiften Platte entspricht der Aufbau der Beulbedingung den gleichen Gesetzmäßigkeiten wie bei der querversteiften Platte, wenn wir in der Matrix m und n vertauschen und für X_n Ψ_m setzen.

Wir erhalten damit für die mit $[r-1]$ Längssteifen ausgesteiften Platten als Näherungsfolge für die Steifigkeiten in Abhängigkeit von der Felderzahl r :

$$\left. \begin{aligned}
 1. \text{ Näherung: } \gamma_a^{(1)} &= -\frac{1}{r m^4} \frac{1}{\frac{1}{\Phi_{m,1}}} + k \lambda^2 \delta_a, \\
 2. \text{ Näherung: } \gamma_a^{(2)} &= -\frac{1}{r m^4} \frac{1}{\frac{1}{\Phi_{m,1}} + \frac{1}{\Phi_{m,2r-1}}} + k \lambda^2 \delta_a, \\
 3. \text{ Näherung: } \gamma_a^{(3)} &= -\frac{1}{r m^4} \frac{1}{\frac{1}{\Phi_{m,1}} + \frac{1}{\Phi_{m,2r-1}} + \frac{1}{\Phi_{m,2r+1}}} + k \lambda^2 \delta_a,
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

wobei $\lambda = \frac{\alpha}{m}$ die „Beullänge“ bedeutet. Der Einfluß von δ_a auf die Steifigkeit γ_a ist konstant.

Die Rekursionsformel der i -ten Näherung lautet für die Längssteifen

$$\gamma_a^{(i)} = \gamma_{a0}^{(i-1)} \frac{1}{1 - \frac{r m^4 \gamma_{a0}^{(i-1)}}{\Phi_{m, 2sr+1}}} \quad (12)$$

Als besonderes Merkmal treten in den vorstehenden Gl. (9) bis (12) die den Rosttyp kennzeichnende Anzahl der Plattenfelder r und v auf.

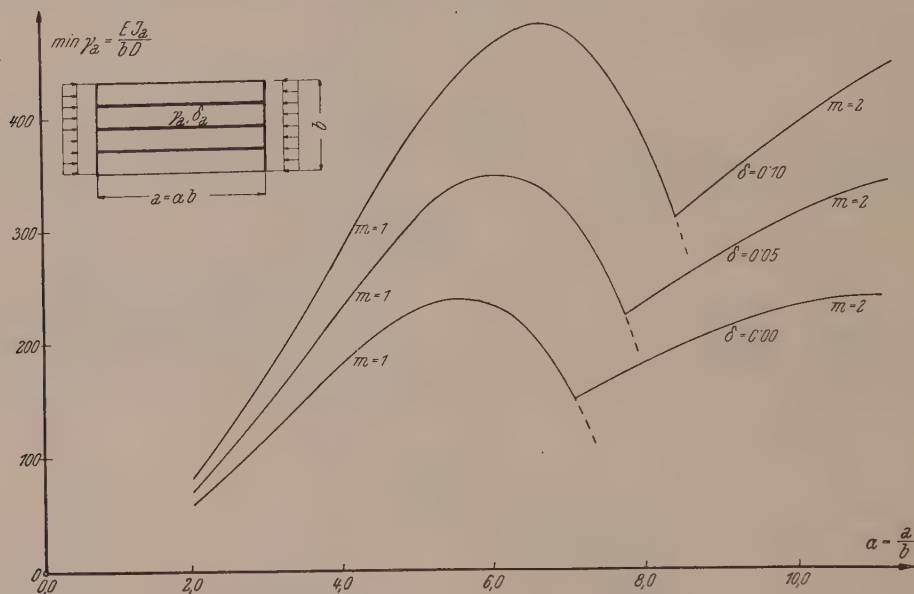


Abb. 5. Mindeststeifigkeiten einer Platte mit drei Längssteifen.

In Abb. 5 sind die Mindeststeifigkeiten für die Platte mit drei Längssteifen, die mit der Rekursionsformel Gl. (12) berechnet wurden, dargestellt. Über das Konvergenzverhalten der Näherungslösungen kann allgemein gesagt werden, daß mit zunehmender Anzahl der Steifen bereits die zweiten oder dritten Näherungen für praktische Bedürfnisse vollkommen ausreichen. Die Konvergenz ist um so besser, je größer das Seitenverhältnis $\alpha = \frac{a}{b}$ der Platte ist. Bei $0 < \alpha < 2$ liefern erst die dritten bis fünften Näherungen hinreichend genaue Werte.

(Eingegangen am 28. April 1953.)

Buchbesprechungen.

The Secondary Flow in Curved Pipes. Von R. W. Detra. (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich. Herausgegeben von J. Ackeret: Nr. 20.) Mit 23 Textabb., 50 S. Zürich: Verlag Leemann. sfr. 15.60.

Eine Strömung mit nicht gleichförmiger Geschwindigkeit erzeugt in einem gekrümmten Rohr größere Verluste wie in einem geraden. Auch die Verteilung der Axialgeschwindigkeit wird beim Strömen in der Krümmung geändert. Diese Erscheinungen untersucht der Verfasser in der Theorie und im Experiment.

In einem Querschnitt des gekrümmten Rohres senkrecht zur Achse werden die einzelnen Flüssigkeitsteilchen infolge ihrer verschiedenen Geschwindigkeiten in der Achsenrichtung verschieden großen Fliehkräften unterworfen sein und dadurch entsteht nun ein Strömen im Quer-

schnitt, die Sekundärströmung. Aus symmetrischen Gründen erfolgt die Strömung so, als ob ein Wirbelpaar vorhanden wäre. Der Verfasser berechnet nun zuerst die Stromfunktion dieser Strömung unter der Annahme einer symmetrischen Wirbelverteilung. Auch andere theoretische Überlegungen führen ihn auf dieselbe Form der Stromfunktion. Anschließend bringt er den interessanten Vergleich zwischen Theorie und Messung. Bei der Berechnung der Verluste durch die Sekundärströmung ergibt sich ein sehr kleiner Betrag.

Die Untersuchung ist ein hübscher Beitrag auf dem Gebiete der Strömungen in gekrümmten Röhren.

R. Bruniak, Wien.

Vorlesungen über höhere Mathematik. Von *A. Duschek*. Dritter Band: Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. — Variationsrechnung. — Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Mit 107 Textabb., IX, 512 S. Wien: Springer-Verlag. 1953. S 220.—, geb. S 235.—; sfr. 37.40, geb. sfr. 39.80; \$ 8.70, geb. \$ 9.25; DM 36.50, geb. DM 38.80.

Wie aus dem Untertitel ersichtlich ist, umfaßt dieser Teil des vierbändigen Werkes jene organisch zusammengehörigen Abschnitte der höheren Mathematik, die zum engeren Rüstzeug der Physiker und Techniker gehören. Der Verfasser sagt in seinem Vorwort, daß er diese Abschnitte mit besonderer Rücksicht auf den eben erwähnten Leserkreis geschrieben hat, und es muß gesagt werden, daß ihm dies auch in hervorragender Weise gelungen ist. Neben der modernen Auffassung des Stoffes, dessen Umfang schon recht weitgehenden Ansprüchen gerecht wird, sei weiters die klare und übersichtliche Darstellung hervorgehoben, die beim Nachschlagen eine rasche Orientierung über einzelne Fragen ermöglicht. An zahlreichen Stellen des Buches ist überdies der unmittelbare Zusammenhang mit der theoretischen Physik, wie beispielsweise durch die Behandlung von Schwingungsvorgängen, die Jacobi-Hamiltonsche Theorie usw. hergestellt. Die vielen Beispiele, denen am Schluß des Buches die Lösungen beigegeben sind, werden sicher sehr willkommen sein. Nicht unerwähnt seien auch einzelne eingestreute historische Notizen und die Angabe von Spezialliteratur für weitere Vertiefung.

Physiker und Techniker werden es daher dankbar begrüßen, daß ihnen Prof. Duschek durch sein Buch ein dem gegenwärtigen Stande der Mathematik entsprechendes Werk zur Verfügung stellt. Der Springer-Verlag hat dem Buche die altgewohnte Sorgfalt bei der Herstellung gewidmet.

E. Czitary, Wien.

Inhalt und Maß. Von *K. Mayrhofer*. Mit 17 Figuren, VIII, 269 S. Wien: Springer-Verlag. 1952. S 180.—, geb. S 195.—; sfr. 37.—, geb. sfr. 40.—; \$ 8.60, geb. \$ 9.30; DM 36.—, geb. DM 39.—.

Da sich dieses Werk in erster Linie und vor allem an den reinen Mathematiker wendet und deshalb für den Leserkreis des vorliegenden Journals wohl nicht von unmittelbarem Interesse ist, sei der Inhalt nur kurz charakterisiert, ohne daß näher auf Einzelheiten eingegangen wird.

Die Theorie des Maßes wird einerseits auf einem axiomatisch eingeführten Maßbegriff aufgebaut (Kap. I), anderseits auf einem axiomatisch erklärten Begriff des äußeren Maßes in Anlehnung an Carathéodory (Kap. V). Es sei hervorgehoben, daß diese beiden Kapitel unabhängig von den übrigen, in denen der Jordansche Inhalt, die Theorie des Borelschen und Lebesgueschen Maßes und die Transformation des Jordanschen Inhaltes und des Borelschen Maßes bei linearen Abbildungen behandelt werden, lesbar sind. Im letzten Kapitel wird durch Einführung des Begriffes des Somas die Theorie weitgehend ausgeschöpft. Im Anhang findet sich eine Darstellung der Borelschen Mengen, die mit einer Konstruktion nicht Borelsch meßbarer Mengen schließt.

Das Studium dieses Werkes verlangt vom Leser eine gewisse Fähigkeit zu abstraktem Denken und einige Kenntnis der Elemente der Mengenlehre. Es ist dem Verfasser gelungen, diese hochinteressante und reizvolle Theorie in einer Weise darzustellen, die sowohl der Forderung nach größtmöglicher Exaktheit als auch nach Übersichtlichkeit gerecht wird. Dazu muß noch gesagt werden, daß die Darstellung dem derzeitigen Stande der Wissenschaft Rechnung trägt, indem sie insbesondere in dem Kapitel über Verbände und Somenfunktionen bis an die neuesten Untersuchungen heranreicht. Eine beigegebene Bibliographie hätte den Wert des vorliegenden Werkes zweifellos erhöht.

H. Sagan, Wien.

Aufgaben aus der Technischen Thermodynamik. Von *H. Richter*. 155 Aufgaben mit 55 Textabb. und 35 Zahlentafeln, VI, 122 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1953. DM 9.—.

Die vorliegende Aufgabensammlung ist sowohl für Studierende als auch für die wärmetechnische Praxis gedacht. Es werden in Kürze 155 Aufgaben samt Lösungen aus folgenden Teilgebieten behandelt: Gase und deren Zustandsänderungen, Kreisprozesse der Gase und Dämpfe, Verbrennung und Zustandsänderungen feuchter Luft, während Wärmeübertragung, Strömung und Vergasung einer Sonderschrift vorbehalten bleiben.

Die Beispiele sind zum Teil der Praxis entnommen, behandeln abwechselnd und oft in origineller Weise die verschiedensten Probleme der Thermodynamik, so daß das Lesen der Schrift nicht eintönig wirkt, sondern zum Nachdenken anregt.

Bei einer Neuauflage wären zunächst etliche Druckfehler zu berichtigen, die in einer Aufgabensammlung besonders störend wirken. Ferner wird empfohlen, zwischen Kraft- und Massenkilogramm (kp und kg) zu unterscheiden und die wiederholt vorkommende Dimensionsformel (m/Grad) für die spezielle Gaskonstante zu vermeiden, das Wort Luftüberschußzahl durch „Luftverhältnis“ und die Bezeichnung at abs, wie üblich, durch ata zu ersetzen. Unstimmigkeiten oder Unklarheiten finden sich auch in den Aufgaben 1, 74, 78, 94, 110, 121 und 135, ferner in Aufgabe 121 und 123 die allerdings in vielen Lehrbüchern anzutreffende, aber ungenaue Darstellung der Kompressor- bzw. Expansorleistung. Auf S. 73 fehlen nähere Angaben, auf S. 88 eine Schalt-skizze.

Abgesehen von diesen leicht zu verbessernden Unstimmigkeiten, kann die anregend geschriebene und vielseitige Aufgabensammlung allen an wärmetechnischen Problemen interessierten Kreisen empfohlen werden.

C. Kämmerer, Wien.

Die Wicklungen elektrischer Maschinen. Von H. Sequenz. In vier Bänden. Zweiter Band: Wenderwicklungen. Mit 423 Textabb., XVI, 331 S. Wien: Springer-Verlag. 1952. S 270.—, geb. S 285.—; sfr. 56.—, geb. sfr. 59.—; \$ 12.90, geb. \$ 13.50; DM 54.—, geb. DM 57.—.

Der nunmehr vorliegende zweite Band des von Prof. H. Sequenz verfaßten Werkes über die Wicklungen elektrischer Maschinen ist den Ankerwicklungen der kommutierenden Maschinen gewidmet. In sieben Hauptabschnitten werden der Reihe nach behandelt: Die grundsätzliche Auslegung einer Stromwenderwicklung (27 S.), die Stromwenderwicklungen mit in Nuten zusammengedrängten Spulen (89 S.), Symmetriebedingungen, Ausgleichsverbindungen und selbstausgleichende Wicklungen (77 S.); mit mehrphasigem Wechselstrom gespeiste, angezapfte und aufgeschnittene Stromwenderwicklungen (34 S.); die mit Rücksicht auf die Stromwendung erforderlichen Sonderausführungen der Stromwenderwicklungen (51 S.); zusätzliche Stromwärme (9 S.) und Sonderwicklungen (35 S.).

Der vorliegende zweite Band ist, ähnlich wie der erste, eine sorgfältige und vollständige Darstellung des Teilgebietes der Stromwenderwicklungen bei kommutierenden Maschinen unter Berücksichtigung der neuesten Literatur, die bei jedem Abschnitt angegeben ist. Auch für den zweiten Band gilt das bei der Besprechung des ersten Bandes Gesagte, daß nämlich die physikalischen Eigenschaften der Wicklungen nur insofern behandelt sind, als sie durch die Wicklung selbst bedingt sind. Da aber gerade auf dem Gebiete der Stromwenderwicklungen z. B. der Stromwendungsvorgang im weitesten Ausmaße die Ausführung der Wicklungen bestimmt, wäre ein näheres Eingehen auf denselben z. B. im Zusammenhang mit den heute wichtig gewordenen mehrgängigen Wicklungen und den verschiedenen Ausgleichs- und Dämpferwicklungen von großem Interesse gewesen, da gerade hierüber in der Literatur kaum etwas zu finden ist. Allerdings hätte eine derartige Erweiterung den Umfang des Buches nicht unwesentlich vergrößert.

Das Buch bringt neben einer guten Auswahl von Werkstattbildern und -zeichnungen eine Fülle von Material, das sonst nur zerstreut in der Literatur zu finden ist. Es vermag dem Berechnungsingenieur für kommutierende Maschinen viele Anregungen zu geben, setzt aber die Kenntnis der Wirkungsweise und entsprechende Erfahrung im Entwurf derartiger Maschinen voraus. Das Buch hat die beim Verlag Springer gewohnte gediegene Ausstattung und kann jedem, der auf dem Sondergebiet des Entwurfes von kommutierenden Maschinen tätig ist, empfohlen werden.

R. Stix, Wien.

Die Übersetzungen der Zusammenfassungen wurden vom Dokumentations-Zentrum der Technik, Wien, durchgeführt.

Herausgeber und Eigentümer: Springer-Verlag in Wien I, Mölkerbastei 5. — Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Franz Magyar, Wien IV, Technische Hochschule, Karlsplatz 13. — Druck: Manzsche Buchdruckerei, Wien IX, Lustkandlgasse 52.

Soeben erschienen:

Spezielle Mineralogie auf geochemischer Grundlage. Von Dr. phil. Felix Machatschki, o. Professor an der Universität Wien. Mit einem Anhang: Ein kristall-chemisches Mineralsystem. Mit 229 Textabbildungen. VII, 378 Seiten. 1953.

Ganzleinen S 215.—, DM 36.—, \$ 8.60, sfr. 37.—

In der Regel sind Lehrbücher der speziellen Mineralogie nach einem der üblichen Mineralsysteme aufgebaut. Im vorliegenden Buch wird von der Geochemie ausgegangen; die Mineralien sind nach ihren genetischen Zusammenhängen ohne Rücksicht auf ihre Stellung in einem System angeordnet, und zwar in der Reihenfolge: Primäre Mineralien, Verwitterungs- und Sedimentationsminerale, Mineralien metamorpher Gesteine. Eine solche Anordnung erscheint geeignet, den sonst trockenen Stoff zu entsperren. Die Mineralbeschreibung umfaßt die wichtigsten kristallographischen, chemischen und physikalischen Kennzeichnungsdaten und die notwendigen Hinweise auf die Kristallstruktur mit entsprechenden Formelbildern. An knappen Verwendungs-, Vorkommens- und Produktionsangaben fehlt es nicht. Der Anhang bringt ein strenges, kristallchemisches Mineralsystem, fußend auf Formeltypen (Klassen), Strukturtypen (Familien), Mischkristallreihen (Gattungen), Einfachverbindungen (Arten), und Mischkristalltypen zwischen letzteren (Varietäten); die Zugehörigkeit kann aus der das Wesentliche erfassenden kristallchemischen Formel entnommen werden. Ein solches System kann auf alle anorganischen Stoffe ausgedehnt werden.

Grundzüge der allgemeinen Geologie. Von Dr. Hans Peter Cornelius. Wien. Herausgegeben von Martha Cornelius-Furlani, Wien. Mit 132 Textabbildungen. VIII, 315 Seiten. 1953.

Steif geheftet S 120.—, DM 24.—, \$ 5.70, sfr. 24.50

Ganzleinen S 135.—, DM 27.—, \$ 6.45, sfr. 27.70

Das vorliegende Buch wendet sich nicht nur an den angehenden Fachgeologen, sondern an jeden Naturwissenschaftler, indem es in die Gedankengänge der allgemeinen Geologie einführt. Es stammt aus berufener Feder, gilt doch sein Verfasser als einer der besten Kenner des gesamten Alpenbogens, dessen Probleme ihn zeitlebens beschäftigten und an deren Lösung er unermüdlich arbeitete.

Auf 300 Seiten bringt er einen Überblick über den stofflichen Aufbau der Erdrinde. Er geht von der Geochemie aus und kommt über die Sedimentgesteine und die Erstarrungsgesteine zur Petrogenese und zur Gesamtarchitektonik der Erde. Anschließend werden die von außen wirkenden Kräfte, vor allen Dingen der Einfluß des Wassers, des Windes und der Isolation behandelt, welche nur durch Erosion die allmähliche Planierung der Erde bewirken. Neben der primären Gesteinszerstörung wird aber auch die sekundäre Gesteinsbildung behandelt, wie wir sie in der Sedimentation der Meere, in den Salzlagerstätten, aber auch in der äolischen Sedimentation vor uns sehen. Hier wird auch über die Genese und die Bedeutung des fossilen Lebens für die Bildung von Erdöl und Kohle gesprochen. Der letzte Teil beschreibt die vulkanischen Erscheinungen und Vorgänge im Erdinnern, die Formen von Vulkanen und die Struktur der Ergußgesteine sowie die noch heute in der Erde stattfindenden Bewegungen und Verschiebungen einschließlich der Gebirgsbildung. Eine große Zahl von Abbildungen, darunter instruktive Schemadarstellungen, Photographien charakteristischer Gebirgszüge sowie viele Mikroschliffe sollen helfen, dem Leser den Inhalt des Buches so anschaulich und lebendig wie möglich zu gestalten.

Ausgewählte Aufgaben und Probleme aus der Experimentalphysik. Eine Einführung in die exakte Behandlung physikalischer Fragestellungen. Zugleich dritte, vermehrte Auflage der „Ergänzungen der Experimentalphysik“. Von Dr. Heinrich Greinacher, vorm. o. Professor der Physik an der Universität Bern. Mit 117 Textabbildungen. IX, 266 Seiten. 1953.

Steif geheftet S 87.—, DM 14.50, \$ 3.45, sfr. 14.80

Die nunmehr unter geänderten Titel erscheinende dritte Auflage der „Ergänzungen zur Experimentalphysik“ enthält insgesamt 90 ausgewählte Aufgaben und Problemstellungen. Sie ist durch Angliederung einer neuen Folge von 22 Kapiteln an die unveränderte zweite Auflage der „Ergänzungen“ entstanden. Auch die neu abgehandelten Themen verteilen sich auf alle Hauptgebiete der Physik, von der Mechanik bis zur Atomphysik. Im übrigen ist der Charakter der Darstellung gleich geblieben. Der Verfasser hat sich auf elementare mathematische Hilfsmittel beschränkt und die Entwicklung der Beispiele so einfach und durchsichtig wie möglich gestaltet. Studierende der Naturwissenschaften und alle jene, die sich über den normalen Vorlesungs- und Lehrbuchstoff hinaus in spezielle Fragen der Experimentalphysik vertiefen und das Rüstzeug der selbständigen Lösung solcher Aufgaben erwerben wollen, erhalten damit ein ideales Hilfsmittel und wertvolle Anregungen.

Abwasserwirtschaft in Österreich. Von Dipl.-Ing. Dr. Reinhard Liepolt, Direktor der Bundesanstalt für Wasserbiologie und Abwasserforschung, Wien-Kaisermühlen. **Die Abwasserwirtschaft in Kärnten.** Von Oberbaurat Dipl.-Ing. Otto Koziel, Klagenfurt. Mit 10 Textabbildungen. V, 40 Seiten. 1953. (Schriftenreihe des Österreichischen Wasserwirtschaftsverbandes, Heft 25.)

Steif geheftet S 18.—, DM 3.—, \$ —.70, sfr. 3.10

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Soeben erschienen:

Die Gasmaschine. Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage. Von Dr.-Ing. Max Leiker, Obergeringenieur der Klöckner-Humboldt-Deutz A. G., Köln-Deutz. Mit 358 Textabbildungen. IX, 260 Seiten. 4^o. 1953. (Band 5 „Die Verbrennungskraftmaschine“, herausgegeben von Professor Dr. Hans List, Graz.) Steif geheftet S 290.—, DM 48.—, \$ 11.45, sfr. 49.20

Seit dem Erscheinen der ersten Auflage von Band 5 „Die Gasmaschine“ zwang der Krieg die von der Einfuhr flüssiger Kraftstoffe abgeschnittenen Länder zur Umstellung zahlreicher, bisher nur flüssige Kraftstoffe verarbeitender Motoren auf Gasbetrieb. Außer stationären und Schiffsmotoren wurden auch solche von Straßen- und Schienenfahrzeugen, sowie Motoren der Bauindustrie u. a. m. umgebaut. Die Bestrebungen, die Umstellung möglichst rasch und mit dem kleinsten Bauaufwand durchzuführen, brachten interessante und wertvolle technische Lösungen für die Umstellung von Viertakt- und auch von Zweitakt-Motoren. Obwohl diese Entwicklung kriegsbedingt war, führte sie auch zu Konstruktionen, die in der heutigen Friedenswirtschaft nicht an Bedeutung verloren haben. In der zweiten Auflage findet diese Entwicklung besondere Beachtung.

Vor kurzem erschienen:

Verschleiß, Betriebszahlen und Wirtschaftlichkeit von Verbrennungskraftmaschinen. Von Dr.-Ing. C. Englisch, Göteborg. Zweite, erweiterte Auflage. Mit 393 Textabbildungen. X, 288 Seiten. 4^o. 1952. (Band 14 „Die Verbrennungskraftmaschine“, herausgegeben von Prof. Dr. Hans List, Graz.) Steif geheftet S 260.—, DM 52.—, \$ 12.40, sfr. 53.30

Verschleiß bedeutet Verlust, nicht nur an den Werkstoffen, sondern auch an aufgewandter Arbeitskraft und Arbeitszeit. Die im ersten Abschnitte des Buches behandelten Verschleißerscheinungen werden daher auch in der vorliegenden zweiten Auflage, die die Entwicklung der letzten Jahre berücksichtigt, mit besonderer Ausführlichkeit behandelt. Die Kapitel über Filter und Schmieröle sind erweitert, jenes über Lagerwerkstoffe ergänzt. Der zweite Abschnitt unterrichtet über den Betriebsmittelverbrauch der heute üblichen Motorenbauarten und ermöglicht damit Vergleiche der Verbrauchsziffern verschiedener Motoren. Im dritten Abschnitt wird kurz aufgezeigt, wie sich die Wirtschaftlichkeit der Verbrennungskraftmaschine auch bei Berücksichtigung unstabiler wirtschaftlicher Verhältnisse erfassen läßt.

Soeben erschienen:

Luft- und Gastafeln zur Berechnung von Gasturbinen und Verdichtern. Von Dipl.-Ing. Julius Kruschik, Rich. Klinger A. G., Wien-Gumpoldskirchen. Mit 21 Abbildungen im Text und auf 17 Tafeln. IV, 7 Seiten Text. 4^o. 1953. Steif geheftet S 69.—, DM 11.40, \$ 2.70, sfr. 11.60

Die Berechnung von Gasturbinen sowie die Auswertung ihrer Prüfstanddaten erfordert die Kenntnis der genauen Werte einer Reihe grundlegender physikalischer Größen von Luft und der in Betracht kommenden Gase. Es sind dies zunächst Enthalpie und Temperatur der trockenen und wasserdampfhaltigen Luft sowie der Verbrennungsgase bei verschiedenem Luftüberschuß. Ferner werden Entropiediagramme, c_p und κ -Werte für Luft und verschiedene Einzelgase sowie Gaskonstanten und Molekulargewichte benötigt. Der bekannte Gasturbinenfachmann hat diese Größen unter Verwendung neuester englischer und amerikanischer Quellen in einer Reihe bequem benutzbarer Diagramme und Nomogramme dargestellt, aus denen alle Werte mit hinreichender Genauigkeit entnommen werden können.

Soeben erschienen:

Die Pumpwerksarten. Steuer- und Schaltmöglichkeiten für elektrisch betriebene Kreiselpumpen. Von Dipl.-Ing. Friedrich Koller, Wien-München. Mit 120 Textabbildungen. VII, 142 Seiten. 1953. Steif geheftet S 96.—, DM 16.—, \$ 3.80, sfr. 16.30

Die große Vielfalt von Steuergeräten, die bei Pumpwerken (Wasserwerken mit Hochbehältern oder Windkesseln) verwendet werden können, der Zusammenhang zwischen ihren Eigenschaften und denen der Pumpen, sowie der verschiedenen Betriebsbedingungen ergeben eine große Zahl von Schaltungsarten. Dieses Buch gibt einen Überblick über die gebräuchlichen Steuer- und Schaltarten (Handschaltung, automatische Schaltung, Schwimmerschaltung, Druckschaltung usw.) und stellt somit eine wertvolle Arbeitsunterlage für den Konstrukteur von Pumpenanlagen dar.

Soeben erschienen:

Hartstoffe und Hartmetalle. Von Dr. phil. nat. R. Kieffer, Direktor der Metallwerk Plansee GmbH., Reutte, und Dr.-Ing. P. Schwarzkopf, Präsident der American Electro Metal Corp., Yonkers, N. Y. Unter Mitarbeit von Dr.-Ing. F. Benesovsky, Leiter der Versuchsanstalt Metallwerk Plansee GmbH., Reutte, und Dr. phil. nat. W. Leszynski, American Electro Metal Corp., Yonkers, N. Y. Mit 280 Textabbildungen. XVI, 717 Seiten. 1953. Ganzleinen S 480.—, DM 79.80, \$ 19.—, sfr. 81.70

Im ersten Teil werden die Herstellung und die Eigenschaften der metallischen Hartstoffe, der hochschmelzenden Übergangsmetalle der 4. bis 6. Gruppe des periodischen Systems besprochen. Ein weiterer Raum ist auch den technisch besonders wertvollen Mischkristallen und Mischphasen dieser Hartstoffe vorbehalten. Der zweite Teil umfaßt die Herstellung, Eigenschaften und Verwendungsgebiete der aus diesen Hartstoffen hergestellten Hartmetalle. Dabei sind große Kapitel dem Einsatz von Hartmetall in der Zerspanungstechnik, bei der Verschleißbekämpfung und als hochwarm- und zunderfester Werkstoff gewidmet. Das Buch wird daher sowohl für reine Wissenschaftler (Chemiker, Strukturforscher, Metallurgen u. a.) als auch für die Hartmetallerzeuger und alle interessierten Verbraucherkreise unentbehrlich sein und bildet eine Fundgrube von Tatsachen und Anregungen auf dem vielseitigen Hartstoffgebiet.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria